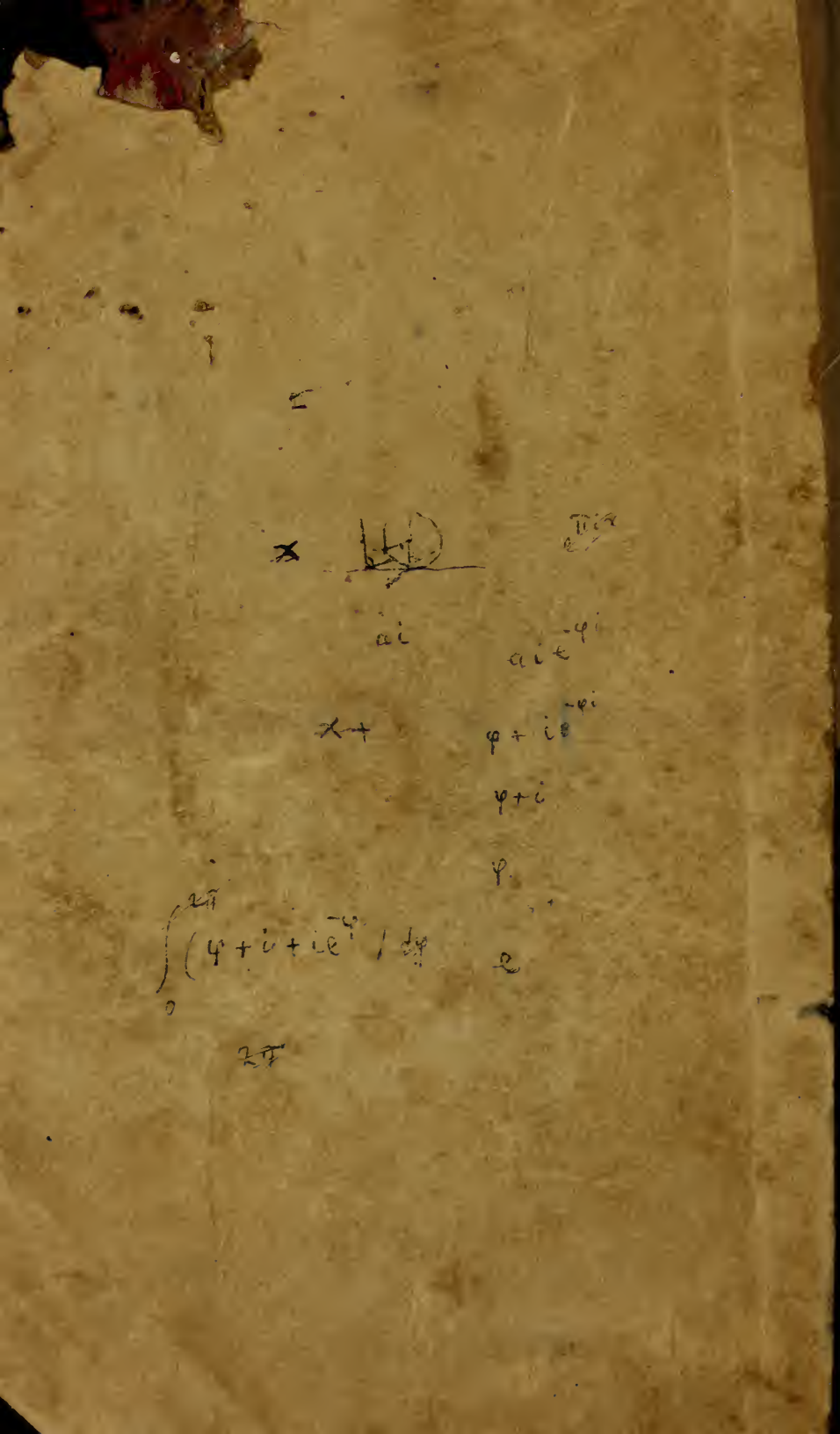


1461/8

НАЧАЛЬНЫЙ УЧЕБНИКЪ

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО И ИНТЕГРАЛЬНАГО

ИСЧИСЛЕНІЯ.

СОСТАВЛЕНЪ

ДЛЯ ГАРДЕМАРИНЪ И КАДЕТЪ МОРСКОГО КОРПУСА

ШТАТНЫМЪ ПРЕПОДАВАТЕЛЕМЪ НИКОЛАЕВСКОЙ МОРСКОЙ АКАДЕМІИ ГЕНЕРАЛЬ-МАЙОРОМЪ

А. Н. КРЫЛОВЫМЪ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типо-Литографія К. Биркенфельда (Вас. остр., 8-я лин.)

1909.

Property of
Dmitri K. Kazarinoff
1515 Cambridge Rd.
Ann Arbor, Mich.
Phone 22207.

515.35
K9492n

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Дифференціальное исчисленіе.

ГЛАВА I.

Введеніе.

	стр.
...ныя понятія и опредѣленія. Величины постоянная и пере...	
...я	1
...ція одной и нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ . . .	3
...ификація функцій	6
...лъ перемѣнной величины	9
...нечно-малая величина	10
...нечно-большая величина.	10
...сть между перемѣнной и ея предѣломъ	11
...мы о предѣлахъ. Предѣлъ суммы, произведенія и частнаго .	11
...порядкахъ безконечно-малыхъ величинъ.	15
...сновныя теоремы о безконечно-малыхъ величинахъ	18
...лы выраженій a^{α}, $\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\alpha}$, $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}$	23
...лъ выраженія $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$	27
...лы выраженій $\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}$ и $\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}$	34

ГЛАВА II.

...ыя и дифференціалы функцій одной перемѣнной независимой. Правила дифференцированія.

	стр.
... понятія. Цѣль изученія измѣненія функціи при измѣненіяхъ ...ѣнной независимой.	36
...ывность функціи. Разрывъ непрерывности	38

§§ стр.
20. Приращеніе функціи. Производная функціи. Геометрическое значеніе ея 42
21. Примѣръ нахожденія производной 47
22. Функція отъ функціи 47
23. Производная функціи отъ функціи 48
24. Производныя простѣйшихъ функцій 50
25. Производныя суммы, произведенія и частнаго 55
26. Производныя тригонометрическихъ функцій 58
27. Таблица производныхъ простѣйшихъ функцій 64
28. Примѣры нахожденія производныхъ 66
29. Дифференціалъ функціи 70
30. Таблица дифференціаловъ простѣйшихъ функцій 73
31. Правила дифференцированія функцій одной перемѣнной независимой 75
32. Геометрическое значеніе дифференціала 76
— Собраніе примѣровъ на дифференцированіе явныхъ функцій одной перемѣнной независимой 78

ГЛАВА III.

Дифференцированіе функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ.

§§ стр.
33. Приращеніе функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ . . 92
34. Непрерывность функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ . 93
35. Частныя производныя и частные дифференціалы 95
36. Полный дифференціалъ 97
37. Полный дифференціалъ и полное приращеніе функціи, ихъ разность 98
38. Дифференцированіе сложныхъ функцій. 103
— Собраніе примѣровъ на дифференцированіе явныхъ функцій съ двумя и многими перемѣнными независимыми 107

ГЛАВА IV.

Дифференцированіе функцій неявныхъ.

§§ стр.
39. Дифференцированіе одной неявной функціи одной перемѣнной независимой 109
40. Нахожденіе производныхъ нѣсколькихъ неявныхъ функцій одной перемѣнной независимой. 112
41. Дифференцированіе неявныхъ функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ 114

146/2

ГЛАВА V.

Производныя и дифференціалы высшихъ порядковъ.

§§ стр.

12. Производныя высшихъ порядковъ. Нахожденіе производной порядка n для нѣкоторыхъ простѣйшихъ функцій 120
13. Дифференціалы высшихъ порядковъ функцій одной независимой перемѣнной 125

ГЛАВА VI.

О рядахъ.

§§ стр.

41. Основныя опредѣленія. Рядъ, общій членъ его. Сходимость ряда, сумма ряда, остатокъ ряда 129
45 и 46. Общія условія сходимости рядовъ 134
47, 48, 49 и 50. Признаки сходимости рядовъ съ положительными членами 137
51. Ряды знакоперемѣнные. Сходимость ихъ 145
52. Ряды съ членами мнимыми. Абсолютная сходимость 147
53 и 54. Ряды, расположенные по цѣлымъ положительнымъ степенямъ перемѣнной 149
55. Кругъ и радіусъ сходимости 149
56. Опредѣленія радіуса сходимости въ нѣкоторыхъ простѣйшихъ случаяхъ 154
57. Производные ряды 157

ГЛАВА VII.

Рядъ Тейлора и рядъ Маклорена.

§§ стр.

59. Разложеніе въ рядъ приращенія цѣлой функціи 160
60. Разложеніе въ рядъ приращенія всякой функціи 162
61 и 62. Теорема Ролля 164
63. Остаточный членъ ряда Тейлора. Различные виды его 165
64. Рядъ Маклорена и разные виды остаточнаго члена его 169
65. Нѣкоторые простѣйшіе примѣры примѣненія ряда Тейлора . . . 171

ГЛАВА VIII.

Разложеніе функцій въ ряды.

§§ стр.

66. Общій пріемъ разложенія въ рядъ явной функціи одной перемѣнной независимой 176
67. Разложеніе въ рядъ e^x 178

§§ стр.
68. Разложеніе въ ряды $\mathrm{Sin}\, x$ и $\mathrm{Cos}\, x$ 180
69. Синусъ и косинусъ малыхъ дугъ 183
70. Разложеніе въ рядъ $\log(1 \pm x)$ 185
71. Вычисленіе логариомовъ чиселъ 188
72 и 73. Биномъ Ньютона 191

ГЛАВА IX.

О неопредѣленныхъ выраженіяхъ вида $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 . \infty$; $\infty - \infty$ и проч.

§§ стр.
74, 75. Неопредѣленныя выраженія вида $\frac{0}{0}$ 198
76. Неопредѣленныя выраженія вида $\frac{\infty}{\infty}$ 201
77. Неопредѣленныя выраженія вида $0 . \infty$ 205
78. Неопредѣленныя выраженія вида: 0°, ∞°, 1^∞ 206
79. Неопредѣленныя выраженія вида $\infty - \infty$ 207
80. Разысканіе истинной величины выраженій, принимающихъ неопредѣленный видъ, пользуясь разложеніемъ въ ряды 207
81. Случай функціи двухъ или нѣсколькихъ перемѣнныхъ 208
— Задачи на разысканіе истинной величины выраженій, принимающихъ неопредѣленный видъ 209

ГЛАВА X.

Возрастаніе и убываніе функцій, ихъ наибольшія и наименьшія значенія.

§§ стр.
82. Общіе условія возрастанія и убыванія функцій одной перемѣнной независимой. Maximum. Minimum 210
83 и 84. Нахожденіе maximum'а и minimum'а явныхъ функцій одной независимой перемѣнной 215
85. Относительныя maximum и minimum 220
— Задачи на разысканіе maximum'а и minimum'а 229

ГЛАВА XI.

Простѣйшія геометрическія приложенія дифференціальнаго исчисленія.

§§ стр.
86, 87 и 88. Касательная къ плоской кривой. Уравненіе ея въ разныхъ видахъ 235
89. Нормаль къ плоской кривой. Уравненіе ея 243

Интегральное исчисленіе.

ГЛАВА XII.

Основныя понятія и теоремы интегральнаго исчисленія.

§§ стр.

90. Предметъ интегральнаго исчисленія 245
91. Производная простой площади 245
92. Производная алгебраической суммы площадей 248
93. Опредѣленный интегралъ. 250
94. Неопредѣленный интегралъ 253
95. Простѣйшія свойства опредѣленнаго интеграла. 254
Опредѣленный интегралъ какъ предѣлъ суммы 257
96. Интегралъ отъ алгебраической суммы функцій 262

Пріемы интегрированія.

стр.

Четыре главныхъ пріема интегрированія 265
Непосредственное интегрированіе. Таблица интеграловъ простѣйшихъ функцій 266
Интегрированіе черезъ разложеніе 268
100. Интегрированіе введеніемъ новой перемѣнной 269
101. Интегрированіе по частямъ 274

ГЛАВА XIII.

Интегрированіе функцій раціональныхъ.

§§ стр.

103. Интегрированіе цѣлыхъ функцій 278
104. 105 и 106. Интегрированіе раціональныхъ дробей. Разложеніе раціональной дроби на простѣйшія 279
Примѣры интегрированія раціональныхъ дробей 299
Частные случаи интегрированія раціональныхъ дробей 312

ГЛАВА IV.

Интегрированіе простѣйшихъ ирраціональныхъ функцій.

§§ стр.

109. Первый видъ ирраціональностей 315
110. Второй классъ ирраціональностей. Интегралы, содержащіе корень квадратный изъ трехчлена второй степени 319
111. Второй пріемъ нахожденія интеграловъ указаннаго въ § 110 вида. 326

ГЛАВА XV.

Интегрированіе трансцендентныхъ функцій.

§§		стр.
112.	Простѣйшіе виды интегралов трансцендентныхъ функцій, приводящіеся къ интеграламъ алгебраическихъ функцій	330
113 и 114.	Интегралы вида $\int e^{ax} f(x) \cdot dx$; $\int \mathrm{Sin}\ ax \cdot f(x) \cdot dx$ и $\int \mathrm{Cos}\ ax \cdot f(x)\, dx$	339
115.	Интегралы вида $\int \mathrm{Sin}\ ax\ \mathrm{Cos}\ bx \cdot dx$, $\int \mathrm{Sin}\ ax\ \mathrm{Sin}\ bx\, dx$ $\int \mathrm{Cos}\ ax\ \mathrm{Cos}\ bx \cdot dx$	344
116.	Интегралы: $\int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\ ax}$ и $\int \frac{dx}{\mathrm{Cos}\ ax}$	347

ГЛАВА XVI.

Приложенія интегральнаго исчисленія къ вычисленію площадей, объемовъ и т. под.

§§		стр.
117.	Вычисленіе площадей. Примѣры	348
	Площади кривыхъ, уравненія коихъ даны въ полярныхъ координатахъ	355
118.	Вычисленіе объемовъ. Примѣры	358
119.	Приближенное вычисленіе опредѣленныхъ интегралов. Правило трапецій	362
120.	Формула Симпсона	365
	Примѣры приближеннаго вычисленія опредѣленнаго интеграла	367
	Задачи на интегрированіе функцій	370

ГЛАВА XVII.

Интегрированіе нѣкоторыхъ простѣйшихъ дифференціальныхъ уравненій.

§§		стр.
121.	Основныя понятія и опредѣленія	381
122 и 123.	Общій интегралъ	383
124.	Интегрированіе уравненій перваго порядка, въ которыхъ перемѣнныя отдѣлены, или отдѣляются	389
125.	Однородныя дифференціальныя уравненія	393
126.	Линейныя дифференціальныя уравненія перваго порядка	398
127.	Примѣры геометрическихъ вопросовъ приводящихъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ перваго порядка	402

ГЛАВА XVIII.

Интегрированіе нѣкоторыхъ простѣйшихъ уравненій второго и высшихъ порядковъ.

§§ стр.

128. Аналитическое происхожденіе дифференціальныхъ уравненій высшихъ порядковъ. Общій интегралъ 404
129. Интегрированіе уравненія: $y'' + n^2 y = 0$ 406
130. Интегрированіе уравненія: $y'' - n^2 y = 0$ 409
131. Интегрированіе уравненія: $y'' + 2hy' + ky = 0$ 411
132. Разборъ рѣшеній уравненія $y'' + n^2 y = 0$ 415
133. Разборъ рѣшеній уравненія $y'' + 2hy' + ky = 0$ 418
134 и 135. Уравненія вида $y'' + n^2 y = a \operatorname{Sin}(kt + \alpha)$ и $y'' + 2hy' + m^2 y = a \operatorname{Sin}(kt + \alpha)$ 423
136. Уравненія вида $y'' + n^2 y = a \operatorname{Sin}(nt + \alpha)$ 428
137. Разборъ рѣшеній уравненія $y'' + n^2 y = a \operatorname{Sin}(kt + \alpha)$ 433
138. Разборъ рѣшеній уравненія $y'' + 2hy' + m^2 y = a \operatorname{Sin}(kt + \alpha)$ . . . 437
Задачи 441

Дифференціальное исчисленіе.

ГЛАВА I.

Введеніе.

1. Прежде чѣмъ приступить къ изложенію началъ диффе-іальнаго исчисленія необходимо дать опредѣленія тѣхъ ятій, съ которыми все время прúдется имѣть дѣло.

Важнѣйшія изъ этихъ понятій суть: о перемѣнныхъ вели-нахъ и функціяхъ, о предѣлахъ и о безконечно-малыхъ ве-чинахъ.

§ 2. *Величина, которой при разсмотрѣніи даннаго вопроса* Величина постоянная и перемѣнная.
приписывается одно вполнѣ опредѣленное значеніе, называется **постоянной.**

Такъ напримѣръ всякія данныя числа какъ 2, $\sqrt{7}$, $\log 3$, $\frac{2}{7}$ и т. под. суть величины постоянныя.

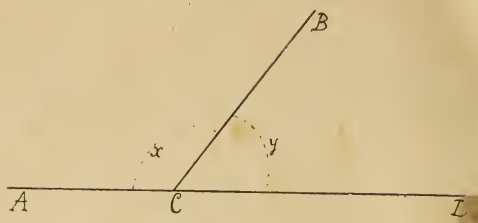
Перемѣнною *величиною называется такая, которая въ данномъ вопросѣ можетъ принимать безчисленное множество различныхъ значеній этимъ вопросомъ вполнѣ опредѣляемыхъ.*

Каждое изъ вышеупомянутыхъ значеній называется *частнымъ значеніемъ* перемѣнной.

Чтобы ввести перемѣнную величину въ исчисленіе, одно изъ частныхъ ея значеній, *не указывая которое именно,* обозначаютъ буквою и надъ этою буквою производятъ по пра-

виламъ алгебры тѣ дѣйствія, которыя по роду вопроса необходимы.

Перемѣнныя величины встрѣчаются въ самыхъ элементарныхъ вопросахъ, такъ напримѣръ, когда въ геометріи высказываютъ теорему: сумма двухъ смежныхъ угловъ ACB и BCD равняется двумъ прямымъ угламъ, (черт. 1)



Черт. 1.

то каждый изъ угловъ какъ ACB, такъ и BCD можетъ принимать безчисленное множество различныхъ значеній; если бы мы пожелали выразить формулою нашу теорему, то обозначивъ одно изъ значеній угла ACB, *не указывая которое именно* черезъ x и соотвѣтствующее значеніе угла BCD черезъ y, а прямой уголъ черезъ d, мы получили-бы для выраженія высказанной теоремы формулу

$$x + y = 2d.$$

Въ этой формулѣ x и y представляютъ величины перемѣнныя, d—величину постоянную.

Точно также, когда высказываемъ напримѣръ теорему: произведеніе отрѣзковъ хордъ проведенныхъ черезъ данную точку D внутри круга равно произведенію отрѣзковъ діаметра проходящаго черезъ эту точку, то обозначивъ одинъ изъ отрѣзковъ какой либо хорды, *не указывая которой именно*, черезъ x, а другой отрѣзокъ этой хорды черезъ y, а отрѣзки діаметра черезъ a и b, мы выразимъ высказанную теорему формулою

$$xy = ab.$$

Въ этой формулѣ x и y суть величины перемѣнныя, a и b— постоянныя.

Въ обоихъ примѣрахъ само собою ясно какія частныя значенія могутъ принимать величины x и y.

Когда въ ариометикѣ высказываютъ напримѣръ теорему: если число N дѣлится безъ остатка на простое число p и на неравное ему простое число q, то оно дѣлится безъ остатка и ихъ на произведеніе pq, то числа p, q и N суть величины перемѣнныя; причемъ частныя значенія величинъ p и q суть:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

частныя-же значенія перемѣнной N суть:

6, 10, 14, 15, 18, 21, 22, 24, 26, 28, ...

Перемѣнныя величины раздѣляются на два класса: *перемѣнныя непрерывныя* и *перемѣнныя прерывныя*.

Перемѣнная непрерывная и прерывная.

Перемѣнная величина называется **непрерывною** *между двумя ея границами a и b, если она можетъ принимать* **всякое** *значеніе с лежащее между этими границами, такъ и самыя значенія a и b; въ противномъ случаѣ перемѣнная называется* **прерывною.**

Такъ въ предыдущихъ примѣрахъ перемѣнныя x и y — непрерывныя, перемѣнныя p, q и N—прерывныя.

Ясно, что для заданія непрерывной перемѣнной достаточно задать границы, въ которыхъ лежатъ частныя ея значенія; для заданія перемѣнной прерывной надо указать самый *рядъ* частныхъ ея значеній, или законъ составленія ихъ.

Когда непрерывная перемѣнная можетъ принимать *всякое* положительное или отрицательное значеніе *сколь бы велико оно по абсолютной величинѣ ни было*, то говорятъ, что эта перемѣнная измѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$. Отсюда понятенъ и смыслъ выраженій: перемѣнная измѣняется отъ 0 до $+\infty$ или отъ 0 до $-\infty$.

Функція.

§ 3. *Если въ какомъ либо вопросѣ встрѣчаются двѣ перемѣнныхъ величины x и y такихъ, что каждому частному*

значенію одной изъ нихъ x соотвѣтствуетъ одно вполнѣ опредѣленное значеніе другой y, то эта послѣдняя называется **функціей** *отъ x; перемѣнная-же x, называется тогда* **перемѣнною независимою** *или* **аргументомъ.**

Такъ напримѣръ:

$$y = 2x + 5$$
$$y = x^2 + \sqrt{x}$$
$$y = \log \operatorname{Sin} x$$

и т. под. суть функціи перемѣнной x.

Въ этихъ примѣрахъ указаны тѣ дѣйствія, которыя надо произвести надъ частнымъ значеніемъ перемѣнной x, чтобы получить соотвѣтствующее частное значеніе перемѣнной y; въ тѣхъ же случаяхъ, когда надо только показать, что перемѣнная y есть нѣкоторая функція перемѣнной x, то принято такое обозначеніе:

$$y = f(x);$$

что выговариваютъ «y равно функціи f отъ x».

Если кромѣ перемѣнной y надо разсматривать еще другія функціи отъ x, напримѣръ z, u, . . . то ихъ тогда обозначаютъ разными буквами, напримѣръ:

$$z = F(x)\ ;\ u = \varphi(x) \text{ и т. д.}$$

Функція нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ.

Если въ данномъ вопросѣ встрѣчается нѣсколько перемѣнныхъ x, y, z, . . . t такихъ, что частныя значенія ни одной изъ нихъ не опредѣляются остальными, и перемѣнная V такая, которая принимаетъ одно вполнѣ опредѣленное частное значеніе, когда всѣмъ остальнымъ будутъ приписаны ихъ частныя значенія, то V называется функціей перемѣнныхъ x, y, z, . . . t, которыя сами называются перемѣнными независимыми.

Такъ напр.:

$$V = x^2 + 3xy + z^2$$

есть функція перемѣнныхъ x, y, z.

Для многихъ перемѣнныхъ пользуются подобнымъ-же обозначеніемъ, какъ и для одной и пишутъ:

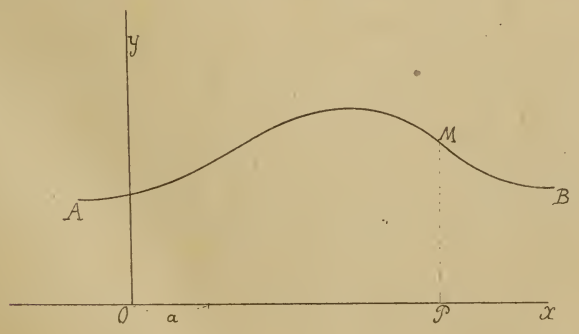
$$V = F(x, y, z, \ldots t),$$

что выговариваютъ такъ: «V равно функціи F отъ x, y, z ... t.»

Во всѣхъ предыдущихъ примѣрахъ мы предполагали, что функція задается «аналитически», разумѣя подъ этимъ терминомъ, что принятыми въ алгебрѣ, тригонометріи или математическомъ анализѣ вообще знаками указаны тѣ дѣйствія, которыя надо совершить надъ частными значеніями перемѣнныхъ независимыхъ, чтобы получить соотвѣтствующее частное значеніе функціи.

Въ нѣкоторыхъ прикладныхъ наукахъ функція одной перемѣнной задается часто «графически» т. е. чертежомъ.

Такъ если дана система прямоугольныхъ координатныхъ осей Ox и Oy, указана длина a принятая за 1 и начерчена кривая AB (черт. 2), то всякому данному численному значе-



Черт. 2.

нію перемѣнной x, соотвѣтствуетъ одна и только одна точка P на оси Ox; абсциссѣ OP соотвѣтствуетъ одно вполнѣ опредѣленное значеніе PM ординаты y точки M на кривой AB. Такимъ образомъ каждому значенію перемѣнной x мы находимъ одно вполнѣ опредѣленное значеніе другой перемѣнной y; по опредѣленію функціи, y есть, слѣдовательно, функція отъ x.

Если мы эту функцію обозначимъ черезъ $f(x)$, то будетъ

$$y = f(x).$$

Это уравненіе называютъ уравненіемъ данной кривой AB.

Когда кривая AB такова, что она представляетъ собою мѣсто точекъ, обладающихъ въ отличіе отъ прочихъ точекъ плоскости опредѣленнымъ геометрическимъ свойствомъ, то уравненіе кривой можетъ быть найдено, и функція $f(x)$ выражена аналитически.

Во многихъ практическихъ вопросахъ кривая AB показывающая зависимость перемѣнной y отъ x дается только *чертежомъ*, какъ напр., для обводовъ корабля, разнаго рода записей самопишущими приборами и пр.

Въ нашемъ курсѣ мы будемъ всѣ функціи предполагать заданными «аналитически», а кривыя—имѣющими уравненія.

Классификація функцій.

§ 4. По отношенію къ функціямъ приняты слѣдующіе термины:

Функція называется *цѣлою*, если для полученія ея надъ перемѣнными независимыми совершаются въ конечномъ числѣ дѣйствія сложенія, вычитанія, умноженія, и какъ частный его случай возвышенія въ цѣлую положительную степень.

Слѣдовательно общій видъ цѣлой функціи напримѣръ трехъ перемѣнныхъ x, y, z, будетъ алгебраическая сумма членовъ вида:

$$A\, x^p\, y^q\, z^r$$

причемъ коефиціенты A суть какія угодно данныя числа, показатели-же p, q, r всѣ *цѣлые* и *положительные*.

Напримѣръ:

$$V = x^3 + \frac{\sqrt{3}}{2} x^2\, y - \sqrt[3]{\frac{5}{7}}\, x\, y\, z$$

есть *цѣлая* функція перемѣнныхъ x, y, z.

Сумма показателей перемѣнныхъ въ каждомъ членѣ называется степенью этого члена.

Степенью функціи называется наивысшая изъ степеней ея отдѣльныхъ членовъ.

Если степень всѣхъ членовъ функціи одна и таже то такая цѣлая функція называется *однородною* цѣлою функціей.

Алгебраическимъ *уравненіемъ между перемѣнными называется такое уравненіе между ними, у котораго въ одной части находится цѣлая функція этихъ перемѣнныхъ, а въ другой ноль, или уравненіе которое къ такому виду приводится, по освобожденіи отъ знаменателей и радикаловъ.*

Такъ напримѣръ:

$$x^3 + 3\,x^2\,y + y^3 - 5x + 3y - 7 = o$$

есть уравненіе алгебраическое относительно перемѣнныхъ x и y.

Точно также уравненіе

$$z + 3\,x + \sqrt{x^2 + y^2} - 5 = o$$

есть также алгебраическое, ибо, по освобожденіи отъ радикала, оно принимаетъ видъ:

$$x^2 + y^2 - (5 - z - 3\,x)^2 = o$$

или

$$y^2 - 8\,x^2 - z^2 + 10\,z + 30\,x - 6\,x\,z = o$$

Функція называется *явною*, если задано ея выраженіе въ перемѣнныхъ независимыхъ и *неявною*, если, для полученія такого выраженія, надо рѣшить одно уравненіе съ одною неизвѣстною или нѣсколько уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными.

Напримѣръ, если для опредѣленія V задано уравненіе

$$V^2 - 2\,x\,V - y^2 = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

то V есть функція неявная. Рѣшивъ же это уравненіе мы получимъ:

$$V = x + \sqrt{x^2 + y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

и

$$V = x - \sqrt{x^2 + y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

явныя функціи опредѣляемыя уравненіемъ (1).

Функція называется алгебраическою, если она удовлетворяетъ алгебраическому уравненію связывающему ее съ перемѣнными независимыми.

Такъ напримѣръ:

$$V = x + \sqrt{x}$$

есть функція алгебраическая, потому что она удовлетворяетъ уравненію

$$(V - x)^2 - x = o$$

или

$$V^2 - 2\,x\,V + x^2 - x = o.$$

Точно также функція:

$$V = x + y + \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

есть функція алгебраическая ибо она удовлетворяетъ уравненію

$$(V - x - y)^3 - (x^3 + y^3) = o\,.$$

Такія-же функціи какъ напримѣръ:

$$V = Sin\,x$$
$$V = log\,x$$
$$V = tg\,x$$

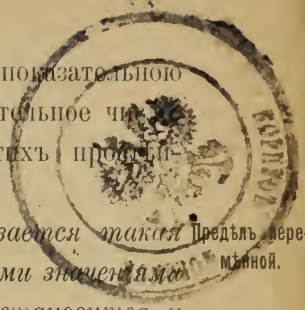
относительно которыхъ доказано, что онѣ не удовлетворяютъ никакому алгебраическому уравненію между x и V называются *трансцендентными.*

Алгебраическая функція V, удовлетворяющая уравненію первой степени относительно этой буквы называется **раціональною**, *въ остальныхъ случаяхъ ирраціональною.*

Нетрудно видѣть изъ сдѣланныхъ опредѣленій, что раціональная функція или сама цѣлая, или-же представляетъ собою отношеніе двухъ цѣлыхъ функцій.

Изъ трансцендентныхъ функцій мы будемъ имѣть дѣло лишь съ простѣйшими именно: тригонометрическими прямыми ($Sin\,x$, $cos\,x$, $tg\,x$, $cotg\,x$, $sec\,x$, $cosec\,x$), тригонометрическими

обратными ($arcsin\, x$, $arctg\, x$), логариѳмомъ и показательною функціей, т. е. $log\, x$ и a^x, гдѣ a любое положительное число, а также съ функціями составленными изъ этихъ простѣйшихъ.



§ 6. **Предѣломъ** *перемѣнной величины называется такая* **постоянная**, *разность между которою и частными значеніями перемѣнной, начиная съ нѣкотораго изъ нихъ становится и для всѣхъ дальнѣйшихъ остается по абсолютной величинѣ меньше какой угодно напередъ назначенной величины.* Предѣлъ перемѣнной.

Изъ самаго опредѣленія предѣла видно, что частныя значенія перемѣнной предполагаются расположенными въ опредѣленномъ порядкѣ.

Пусть частныя значенія перемѣнной x будутъ:

$$x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; \ldots\ldots \; x_n \; x_{n+1} \; \ldots\ldots$$

и пусть будетъ задана напередъ нѣкоторая положительная величина ε, то, если существуетъ такая постоянная a, что абсолютная величина разности:

$$[x_n - a] < \varepsilon \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

если только

$$n \geqq k \, , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

то постоянная a и есть предѣлъ перемѣнной x, что обозначаютъ знакоположеніемъ

$$\text{пред. } x = a$$
$$\text{или } lim\; x = a.$$

Примѣръ. Пусть рядъ частныхъ значеній перемѣнной x есть:

$$1 \,;\, 1 + \tfrac{1}{2} \,;\, 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \,;\, 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} \,;\, \ldots\; 1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{2^n} \ldots$$

то предѣлъ этой перемѣнной есть 2.

Дѣйствительно зададимъ какое угодно малое число ε, то такъ какъ

$$x_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \ldots + \tfrac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \tfrac{1}{2^n}$$

то взявъ n такъ чтобы было:

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

иначе

$$n > \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

то неравенство

$$[x_n - 2] < \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

будетъ удовлетворено.

Безконечно малая величина.

§ 7. **Безконечно малою** *называется такая перемѣнная, въ ряду частныхъ значеній которой найдется такое, что само оно и всѣ за ними слѣдующія, по численной величинѣ* **меньше** *любого наперед назначеннаго числа. Иными словами: безконечно малая есть такая перемѣнная, предѣлъ которой есть нуль.*

Примѣръ. Если рядъ частныхъ значеній перемѣнной x есть:

$$1\ ;\ \tfrac{1}{2}\ ;\ \tfrac{1}{3}\ ;\ \tfrac{1}{4}\ .\ \ldots .\ \frac{1}{n}, \ldots .$$

то такая перемѣнная есть безконечно малая, такъ какъ какое бы число ε задано ни было, то, взявъ

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

найдемъ, что частное значеніе перемѣнной $x_n = \frac{1}{n}$ и всѣ за нимъ слѣдующія будутъ меньше ε.

Безконечно большая величина.

§ 8. **Безконечно большою** *называется такая перемѣнная, въ ряду частныхъ значеній которой найдется такое, что оно само и всѣ за нимъ слѣдующія по численной величинѣ* **больше** *любого наперед назначеннаго числа N.*

Безконечно большая величина не имѣетъ предѣла, но условно говорятъ, что безконечно большая величина имѣетъ предѣломъ безконечность.

Нетрудно видѣть, что если x есть величина безконечно большая, то величина

$$y = \frac{1}{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

есть безконечно малая, и значитъ, если въ какую нибудь формулу входитъ безконечно большая величина x, то стоитъ только въ этой формулѣ замѣнить x его величиной $\frac{1}{y}$ слѣдующей изъ (1), чтобы въ эту формулу вмѣсто безконечно большей величины ввести безконечно малую.

§ 9. Сопоставляя опредѣленія предѣла и безконечно малой видимъ, что если

$$\text{пред. } x = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

то разность

$$\alpha = x - a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

есть величина безконечно малая, и наоборотъ, если разность

$$x - a$$

между перемѣнною x и постоянною a есть безконечно малая, то предѣлъ перемѣнной x есть a.

Этимъ послѣднимъ свойствомъ часто пользуются при разысканіи предѣла перемѣнной.

Изъ (2) слѣдуетъ

$$x = a + \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

т. е., что всякая перемѣнная, имѣющая предѣлъ, равна своему предѣлу, сложенному съ безконечно малою величиной. Это дозволяетъ во всякой формулѣ, гдѣ входитъ перемѣнная, имѣющая предѣлъ, ввести вмѣсто нея безконечно малую величину, воспользовавшись равенствомъ (3).

Теоремы о предѣлахъ.

§ 10. Такъ, пользуясь этою замѣною, легко доказываются слѣдующія теоремы:

1-ая) *Предѣлъ алгебраической суммы нѣсколькихъ перемѣнныхъ равенъ таковой-же суммѣ ихъ предѣловъ.*

Пусть напр. даны перемѣнныя x, y, z, коихъ предѣлы соотвѣтственно:

$$\left.\begin{array}{l} \text{пред. } x = a \\ \text{пред. } y = b \\ \text{пред. } z = c \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и ихъ алгебраическая сумма напр.

$$S = x - y + z.$$

Надо доказать что

$$\text{пред. } S = \text{ пред. } x - \text{ пред. } y + \text{ пред. } z.$$

Въ силу равенствъ (1) имѣемъ, обозначая черезъ α, β, γ безконечно малыя величины:

$$x = a + \alpha$$
$$y = b + \beta$$
$$z = c + \gamma$$

и слѣдовательно

$$S = x - y + z = (a - b + c) + (\alpha - \beta + \gamma). \quad . \quad (2)$$

Очевидно что величина

$$\alpha - \beta + \gamma$$

есть безконечно малая, обозначимъ ее черезъ δ, тогда будетъ

$$S = (a - b + c) + \delta$$

т. е. что перемѣнная величина S равна постоянной $a - b + c$ плюсъ безконечно малая δ, значитъ

$$\text{пред. } S = a - b + c$$

или въ силу равенства (1)

$$\text{пред. } S = \text{ пред. } x - \text{ пред. } y + \text{ пред. } z.$$

Очевидно, что совершенно также доказали бы эту теорему и для всякаго *конечнаго* числа слагаемыхъ, при каковомъ она только и имѣетъ мѣсто, что и подразумѣвается подъ словомъ «нѣсколькихъ».

2-ая) *Предѣлъ произведенія конечнаго числа множителей равенъ произведенію ихъ предѣловъ.*

Докажемъ сперва справедливость этой теоремы для двухъ множителей, и тогда она сама собою распространится и на любое число ихъ.

Итакъ пусть даны перемѣнныя x и y коихъ предѣлы соотвѣтственно:

$$\text{пред. } x = a$$
$$\text{пред. } y = b$$

Отсюда слѣдуетъ

$$x = a + \alpha$$
$$y = b + \beta$$

Произведеніе этихъ перемѣнныхъ

$$xy = ab + (a\alpha + b\beta + \alpha\beta).$$

Такъ какъ величины a и b конечныя, величины-же α и β безконечно малыя, то очевидно, что и величина

$$a\alpha + b\beta + \alpha\beta$$

есть безконечно малая. Обозначивъ ее черезъ δ, имѣемъ: —

$$xy = ab + \delta.$$

Откуда слѣдуетъ

$$\text{пред. } (xy) = ab = \text{пред. } x \cdot \text{пред. } y.$$

Что и доказываетъ теорему.

Положимъ теперь, что дано произведеніе трехъ перемѣнныхъ xyz.

Тогда имѣемъ:

$$xyz = (xy).z$$

и слѣдовательно:

$$\text{пред. } (xyz) = \text{пред. } (xy). \text{ пред. } z$$

въ силу выше доказаннаго.

Но

$$\text{пред. } xy = \text{пред. } x \cdot \text{пред. } y.$$

Подставляя имѣемъ:

$$\text{пред. } xyz = \text{пред. } x \text{ пред. } y \text{ пред. } z.$$

продолжая такимъ образомъ докажемъ нашу теорему (по такъ называемому переходу отъ n къ $n+1$) для любого *конечнаго* числа перемѣнныхъ.

3-ая) *Предѣлъ дроби равенъ предѣлу числителя, раздѣленному на предѣлъ знаменателя.*

Пусть дана дробь $\frac{x}{y}$ причемъ пред. $x = a$, пред. $y = b$ такъ что сами перемѣнныя суть:

$$x = a + \alpha$$
$$y = b + \beta$$

тогда

$$\frac{x}{y} = \frac{a+\alpha}{b+\beta}$$

Составимъ разность

$$\frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b} = \frac{b\alpha - a\beta}{b(b+\beta)}$$

Очевидно что дробь стоящая въ правой части этого равенства есть величина безконечно малая, ибо числитель ея $b\alpha - a\beta$ безконечно малый, знаменатель-же $b(b+\beta) = b^2 + b\beta$ есть величина конечная. Обозначая эту дробь черезъ δ имѣемъ:

$$\frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \delta$$

иначе

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} + \delta.$$

Это равенство и доказываетъ высказанную теорему.

Эту теорему можно доказать и иначе, такъ:

Пусть $z = \frac{x}{y}$, надо доказать, что пред. $z = \frac{\text{пред. } x}{\text{пред. } y}$.

Очевидно имѣемъ:

$$zy = x$$

и въ силу доказанной теоремы о предѣлѣ произведенія будетъ:

$$\text{пред. } z \cdot \text{пред. } y = \text{пред. } x.$$

Откуда слѣдуетъ:

$$\text{пред. } z = \frac{\text{пред. } x}{\text{пред. } y}$$

иначе:

$$\text{пред. } \frac{x}{y} = \frac{\text{пред. } x}{\text{пред. } y}.$$

§ 11. Выше было показано, что вмѣсто всякой перемѣнной, имѣющей предѣлъ, можетъ быть введена величина безконечно малая, и что всякая безконечно большая величина можетъ быть выражена чрезъ величину безконечно малую.

Отсюда видно важное значеніе безконечно малыхъ величинъ, поэтому изложимъ основныя ихъ свойства.

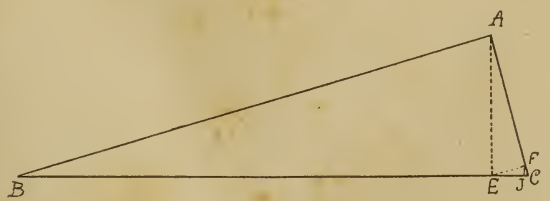
Безконечно малая величина и ихъ порядки.

Если даны двѣ безконечно малыя величины α и β такія, что предѣлъ отношенія $\frac{\beta}{\alpha^n}$, гдѣ n положительное число, есть величина конечная, отличная отъ нуля, то β называется безконечно-малою *порядка n въ отношеніи къ* α, при чемъ эту послѣднюю называютъ *основаніемъ*.

Примѣръ: пусть $\beta = 3\alpha^2 + 5\alpha^3$, то такъ какъ $\frac{\beta}{\alpha^2} = 3 + 5\alpha$ и значитъ пред. $\frac{\beta}{\alpha^2} = 3$ — число конечное отличное отъ нуля; слѣдовательно, согласно съ опредѣленіемъ, β есть безконечно малая 2-го порядка относительно α.

2-й примѣръ:

Пусть данъ прямоугольный при A треугольникъ (черт. 3).



Черт. 3.

коего гипотенуза $BC = a$ имѣетъ заданную длину, уголъ же B безконечно-малый, т. е. перемѣнный и неопредѣленно уменьшается; тогда и катетъ $AC = \alpha$ будетъ безконечно-малый, а вмѣстѣ съ тѣмъ и перпендикуляры AE, EF, FJ . . . очевидно

будутъ величины безконечно-малыя одновременно съ α. Требуется опредѣлить ихъ порядки по отношенію къ α, принимаемому за основаніе.

Имѣемъ:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{BC} \text{ значитъ:}$$

$$\text{пред. } \frac{AE}{\alpha} = \text{пред. } \frac{AB}{BC} = 1.$$

Слѣдовательно AE — без. м. 1-го порядка относительно α.

Затѣмъ имѣемъ:

$$\frac{EC}{AC} = \frac{AC}{BC} \text{ или } \frac{EC}{AC^2} = \frac{1}{a}$$

значитъ

$$\text{пред. } \frac{EC}{\alpha^2} = \frac{1}{a}$$

т. е. величина EC — без. м. 2-го порядка относительно α.

Далѣе:

$$\frac{FC}{EC} = \frac{AC}{BC}, \text{ но } EC = \frac{AC^2}{a}$$

значитъ

$$FC = \frac{EC \cdot AC}{BC} = \frac{AC^3}{a^2} = \frac{\alpha^3}{a^2}$$

и

$$\text{пред. } \frac{FC}{\alpha^3} = \frac{1}{a^2}$$

слѣдовательно FC без. м. 3-го порядка относительно α и т. д....

§ 12. Если β есть безконечно-малая порядка n по отношенію къ α, то, согласно опредѣленію,

$$\text{пред. } \frac{\beta}{\alpha^n} = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ k есть конечное отличное отъ нуля число.

По § 7. Само отношеніе $\frac{\beta}{\alpha^n}$ равно своему предѣлу k плюсъ безконечно-малая величина, которую обозначимъ черезъ ε, значитъ

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = k + \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

откуда

$$\beta = \alpha^n \ (k + \varepsilon) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Если вмѣсто ε возьмемъ другую безконечно-малую δ, такую чтобы было

$$\varepsilon = k\delta,$$

то формула (3) приметъ видъ:

$$\beta = k\alpha^n \ (1 + \delta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

въ которомъ, какъ и въ (3), можетъ быть представлена всякая безконечно-малая порядка n по отношенію къ α.

§ 13. Представляя безконечно-малыя величины порядка n подъ видомъ (3) или (4), легко доказать слѣдующія теоремы:

1) Порядокъ суммы конечнаго числа безконечно-малыхъ величинъ равенъ наименьшему изъ порядковъ слагаемыхъ.

2) Порядокъ произведенія конечнаго числа безконечно-малыхъ величинъ равенъ суммѣ порядковъ множителей.

3) Порядокъ частнаго происходящаго отъ раздѣленія одной безконечно-малой на другую, иначе, порядокъ дроби равенъ порядку числителя безъ порядка знаменателя, причемъ предполагается, что порядокъ числителя выше порядка знаменателя.

Замѣтимъ, что можно составить такія безконечно-малыя величины, которыхъ порядокъ по отношенію къ α не будетъ выражаться никакимъ числомъ, напримѣръ, если $\varepsilon = \frac{1}{\log \alpha}$, то очевидно ε есть безконечно-малая; между тѣмъ нѣтъ такой положительной степени n отъ безконечно-малой α, чтобы пред. $\frac{\varepsilon}{\alpha^n}$ равнялся *конечному* числу k. Точно также для $\varepsilon = \frac{1}{10^{\frac{1}{\alpha}}}$ не найдемъ никакого конечнаго числа n, такого чтобы было

$$\text{пред. } \frac{\varepsilon}{\alpha^n} = \text{конечной величинѣ}$$

Двѣ основныя теоремы о безконечно малыхъ величинахъ.

§ 14. Въ большую часть вопросовъ, рѣшеніе которых требуетъ примѣненіе безконечно малыхъ величинъ, эти послѣднія входятъ или въ видѣ отношенія, предѣлъ котораго и ищется, или-же въ видѣ суммы, составленной изъ безчисленнаго множества безконечно малыхъ слагаемыхъ, предѣлъ которой надо опредѣлить.

Слѣдующія двѣ общія теоремы являются основными при рѣшеніи всѣхъ вопросовъ такого рода.

Теорема 1-я. *При розысканіи предѣла дроби, у которой числитель и знаменатель суть суммы безконечно-малыхъ членовъ, порядки коихъ неравны между собой, и при томъ какъ въ числитель, такъ и въ знаменатель число членовъ конечное, можно замѣнить другою дробью, которая получится, отбросивъ въ числителѣ и знаменателѣ первой безконечно-малыя высшихъ порядковъ и удерживая въ томъ и другомъ только членъ самого низшаго порядка.*

Положимъ имѣемъ дробь $\frac{\beta}{\gamma}$

причемъ

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k$$

и

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_i$$

такъ, что числитель β есть сумма k безконечно-малыхъ членовъ и знаменатель γ есть сумма i таковыхъ; порядки этихъ членовъ между собою различны, и порядокъ β_1 наименьшей изъ порядковъ величинъ β, а порядокъ γ_1 наименьшій изъ порядковъ величинъ γ.

Надо доказать, что

$$\text{пред. } \frac{\beta}{\gamma} = \text{пред. } \frac{\beta_1}{\gamma_1}$$

Имѣемъ:

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k}{\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_i} = \frac{\beta_1 \left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} + \ldots + \frac{\beta_k}{\beta_1}\right)}{\gamma_1 \left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \ldots + \frac{\gamma_i}{\gamma_1}\right)}.$$

Но такъ какъ порядки $\beta_2, \beta_3 \ldots \beta_k$ выше порядка β_1 и порядки $\gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_i$ выше порядка γ_1, то отношенія:

$$\frac{\beta_2}{\beta_1}, \frac{\beta_3}{\beta_1}, \ldots \frac{\beta_k}{\beta_1}$$

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \frac{\gamma_3}{\gamma_1}, \ldots \frac{\gamma_i}{\gamma_1}$$

безконечно-малыя; а такъ какъ число ихъ конечное, то и сумма ихъ безконечно-малая, обозначая сумму первыхъ отношеній черезъ δ, вторыхъ черезъ ε (δ и ε безконечно-малыя) получимъ:

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta_1 (1+\delta)}{\gamma_1 (1+\varepsilon)} = \frac{\beta_1}{\gamma_1} \cdot \frac{1+\delta}{1+\varepsilon}$$

значитъ:

$$\text{пред. } \frac{\beta}{\gamma} = \text{пред. } \frac{\beta_1}{\gamma_1} \cdot \frac{1+\delta}{1+\varepsilon} = \text{пред. } \frac{\beta_1}{\gamma_1} \cdot \text{пред. } \frac{1+\delta}{1+\varepsilon},$$

по теоремѣ о предѣлѣ произведенія.

Очевидно

$$\text{пред. } \frac{1+\delta}{1+\varepsilon} = 1$$

значитъ:

$$\text{пред. } \frac{\beta}{\gamma} = \text{пред. } \frac{\beta_1}{\gamma_1}.$$

что и требовалось доказать.

Доказанную теорему выражаютъ часто иначе. Въ самомъ дѣлѣ замѣтивъ что:

$$\beta = \beta_1 \left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_3}{\beta_1} + \ldots + \frac{\beta_k}{\beta_1}\right) = \beta_1 (1+\delta)$$

и

$$\gamma = \gamma_1 \left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \frac{\gamma_3}{\gamma_1} + \ldots + \frac{\gamma_i}{\gamma_1}\right) = \gamma_1 (1+\varepsilon)$$

то

$$\text{пред. } \frac{\beta}{\beta_1} = 1 \text{ и пред. } \frac{\gamma}{\gamma_1} = 1$$

и слѣдовательно, при доказательствѣ предыдущей теоремы, мы доказали и такую: *при розысканіи предѣла дроби, у которой числитель и знаменатель безконечно-малыя, можно замѣ-*

нить ее другою дробью, отношеніе числителя который къ числителю данной, и знаменателя къ знаменателю — имѣютъ соотвѣтственно своими предѣлами 1.

Эту теорему можно доказать и непосредственно такъ:

Пусть данная дробь есть $\frac{\beta}{\gamma}$

и дано что

$$\text{пред. } \frac{\beta}{\beta_1} = 1 \quad \text{пред. } \frac{\gamma}{\gamma_1} = 1$$

а слѣдовательно и предѣлы обратныхъ отношеній:

$$\text{пред. } \frac{\beta_1}{\beta} = 1 \text{ и пред. } \frac{\gamma_1}{\gamma} = 1$$

надо доказать, что

$$\text{пред. } \frac{\beta}{\gamma} = \text{ пред. } \frac{\beta_1}{\gamma_1}.$$

Очевидно имѣемъ:

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{\beta_1 \cdot \gamma_1}{\beta_1 \cdot \gamma_1} = \frac{\beta}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\gamma_1} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma}$$

значитъ

$$\text{пред. } \frac{\beta}{\gamma} = \text{ пред. } \frac{\beta}{\beta_1} \cdot \text{ пред. } \frac{\beta_1}{\gamma_1} \cdot \text{ пред. } \frac{\gamma_1}{\gamma} = \text{ пред. } \frac{\beta_1}{\gamma_1}.$$

Эта теорема дозволяетъ упрощать разысканіе предѣла дроби, замѣняя ее другою, у которой числитель и знаменатель проще, и мы будемъ ею постоянно пользоваться въ дифференціальномъ исчисленіи, гдѣ она является основною.

Теорема 2-ая. *При разысканіи предѣла суммы перемѣннаго числа n безконечно малыхъ положительныхъ величинъ.*

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n,$$

коихъ число n возрастаетъ неопредѣленно, но при этомъ сумма

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n$$

съ измѣненіемъ какъ числа n, такъ и величины самихъ $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ имѣетъ конечный и опредѣленный предѣлъ, такъ

что

$$\text{пред. } (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n) = A$$

можно заданныя безконечно малыя $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, *замѣнить другими безконечно малыми*

$$\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$$

такими что

$$(1) \ldots \text{пред. } \frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1 \quad \text{пред. } \frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1, \ \ldots \ \text{пред. } \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1.$$

Итакъ требуется доказать, что

$$\text{пред. } (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = \text{пред. } (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n)$$

иначе что

$$\text{пред. } (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) = A.$$

Такъ какъ по предположенію

$$\text{пред. } \frac{\beta_k}{\alpha_k} = 1 \quad (k = \quad 1, 2, \ldots n)$$

то

$$\frac{\beta_k}{\alpha_k} = 1 + \varepsilon_k$$

гдѣ ε_k безконечно малая и значитъ

$$\beta_k = \alpha_k (1 + \varepsilon_k) = \alpha_k + \alpha_k \varepsilon_k.$$

Полагая здѣсь $k = 1, 2, \ldots n$ получимъ равенства:

$$\left.\begin{array}{l} \beta_1 = \alpha_1 + \alpha_1 \varepsilon_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_2 \varepsilon_2 \\ \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_3 \varepsilon_3 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \beta_n = \alpha_n + \alpha_n \varepsilon_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Сложивъ эти равенства имѣемъ:

$$(3) \ldots \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) + (\alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \ldots + \alpha_n \varepsilon_n)$$

Докажемъ теперь что сумма

$$\alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \ldots + \alpha_n\varepsilon_n$$

имѣетъ своимъ предѣломъ o и слѣдовательно эта величина безконечно малая.

По предположенію всѣ величины $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ положительныя, множители же $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ могутъ быть и разныхъ знаковъ. Если мы выберемъ наибольшій изъ этихъ множителей по численной величинѣ и обозначимъ его черезъ ε, а затѣмъ замѣнимъ въ разсматриваемой суммѣ $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ черезъ ε, то получимъ новую сумму, которая по численной величинѣ будетъ больше разсматриваемой. Эта новая сумма будетъ:

$$\alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon + \ldots + \alpha_n\varepsilon = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\,\varepsilon$$

и значитъ по численной величинѣ:

$$[\alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \ldots + \alpha_n\varepsilon_n] < [(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\varepsilon]$$

Такъ какъ предѣлъ правой части:

$$\text{пред. } (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\,\varepsilon =$$
$$\text{пред. } (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) \cdot \text{пред. } \varepsilon = A \text{ пред. } \varepsilon = A \cdot o = O$$

есть нуль, то очевидно, что и предѣлъ лѣвой части, которая по абсолютной величинѣ меньше правой есть также нуль.

Итакъ:

$$\text{пред. } (\alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \ldots + \alpha_n\varepsilon_n) = O. \quad . \quad . \quad (4)$$

Обращаясь къ формулѣ (3) имѣемъ:

$$\text{пред. } (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) =$$
$$\text{пред. } (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) + \text{пред. } (\alpha_1\varepsilon_1 + \ldots + \alpha_n\varepsilon_n)$$

и въ силу (4) будетъ:

$$\text{пред. } (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) =$$
$$\text{пред. } (\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_n) = A.$$

и значитъ обѣ суммы имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ.

Эта теорема можетъ также быть высказана и въ другой формѣ: *При разысканіи предѣла суммы*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

безконечно малыхъ положительныхъ величинъ, число коихъ n возрастаетъ неопредѣленно, сумма же имѣетъ конечный и опредѣленный предѣлъ, можно въ каждомъ членѣ этой суммы отбросить безконечно малыя величины высшихъ порядковъ — предѣлъ суммы не измѣнится.

Дѣйствительно пусть

$$\alpha_k = \alpha'_k + \beta'_k + \gamma'_k + \ldots + \delta'_k$$

и положимъ что порядокъ α'_k наименьшій
тогда

$$\frac{\alpha_k}{\alpha'_k} = 1 + \frac{\beta'_k}{\alpha'_k} + \frac{\gamma'_k}{\alpha'_k} + \ldots + \frac{\delta'_k}{\alpha'_k}$$

и

$$\text{пред. } \frac{\alpha_k}{\alpha'_k} = 1,$$

а значитъ по доказанному выше при разысканіи предѣла суммы величинъ α_k можно ихъ замѣнять величинами α'_k.

Задача. Предлагается привести и разобрать тѣ примѣры элементарной геометріи, гдѣ этою теоремою пользуются.

Теорема о замѣнѣ однихъ безконечно малыхъ другими при разысканіи предѣла суммы является основною въ интегральномъ исчисленіи.

§ 15. Найдемъ предѣлы нѣкоторыхъ выраженій которыми придется пользоваться.

1) **Теорема.** *Если a есть какое угодно положительное число и α безконечно малая величина то*

$$\text{пред. } a^\alpha = 1.$$

Пусть рядъ частныхъ значеній α есть

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$$

и положимъ сперва что $a > 1$, то высказанная теорема будетъ доказана если мы покажемъ, что можно найти такое число n, начиная съ котораго разность

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ ε любое напередъ назначенное положительное число.

Неравенство (1) имѣетъ мѣсто одновременно съ такимъ:

$$(1+\varepsilon)^n > a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Разсмотримъ сумму:

$$1+(1+\varepsilon)+(1+\varepsilon)^2+\ldots+(1+\varepsilon)^{n-1} = \\ = \frac{(1+\varepsilon)^n - 1}{(1+\varepsilon) - 1}$$

такъ какъ каждое слагаемое этой суммы больше 1, а число слагаемыхъ n то сумма больше n иначе

$$\frac{(1+\varepsilon)^n - 1}{\varepsilon} > n$$

откуда

$$(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Очевидно, что если взять:

$$1 + n\varepsilon > a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

то неравенство (2) а значитъ и (1) будутъ удовлетворены, то есть они будутъ имѣть мѣсто для всякаго

$$n > \frac{a-1}{\varepsilon}$$

что и доказываетъ теорему, для того случая, когда безконечно малая α вида $\frac{1}{n}$, гдѣ n есть цѣлое число.

Напр. если

$$a = 10 \text{ и } \alpha = \frac{1}{1.000.000}$$

то стоитъ только взять

$$n > 9.000.000$$

и значитъ

$$\alpha < \frac{1}{9.000.000}$$

то будетъ имѣть мѣсто неравенство:

$$a^{\alpha} - 1 < \frac{1}{1\,000.000}$$

Если число a положительное и меньше 1 то

$$\frac{1}{a} > 1$$

и положивъ

$$\frac{1}{a} = b$$

имѣемъ

$$a = \frac{1}{b}$$

и

$$b > 1.$$

По выше доказанному

$$\text{пред. } b^{\alpha} = 1$$

но

$$\text{пред. } b^{\alpha} = \text{пред. } \frac{1}{a^{\alpha}} = \frac{1}{\text{предъ } a^{\alpha}}$$

значитъ и

$$\text{пред. } a^{\alpha} = 1$$

и въ томъ случаѣ когда $a < 1$ и положительное.

Предлагаются въ видѣ задачи распространить доказательство этой теоремы и на тотъ случай, когда α какая угодно безконечно малая величина, а не только вида $\frac{1}{n}$. (См. § 17).

Этимъ предѣломъ пользуются въ элементарной алгебрѣ при изложеніи теоріи логариѳмовъ.

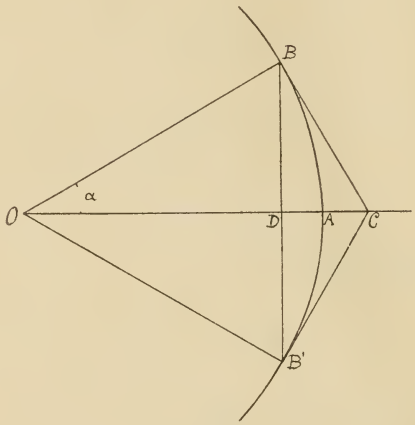
2) **Теорема.** *Предѣлъ отношенія синуса безконечно малаго угла къ тому отвлеченному числу, которымъ этотъ уголъ измѣряется, равенъ 1.*

Какъ извѣстно изъ тригонометріи подъ отвлеченнымъ числомъ, измѣряющимъ данный уголъ, разумѣютъ отношеніе длины дуги его стягивающей къ ея радіусу.

Строимъ кругъ произвольнаго радіуса R и отъ діаметра OA строимъ въ обѣ стороны уголъ $AOB = AOB' = \alpha$, проводимъ хорду BB' и касательныя BC и $B'C$ тогда имѣемъ:

$$BB' = 2\ BD = 2\ R\,Sin\,\alpha$$
$$BC = B'C = R\,tg\,\alpha$$

по принципу Архимеда изъ двухъ линій проходящихъ черезъ



Черт. 4.

двѣ данныя точки и выпуклостями обращенныхъ въ одну сторону, огибающая длиннѣе огибаемой, слѣдовательно

$$BCB' > \smile B'AB > BB'$$

или

$$2\,R\,tg\,\alpha > \smile 2\,AB > 2\,R\,Sin\,\alpha$$

иначе

$$tg\,\alpha > \smile \frac{AB}{R} > Sin\,\alpha$$

Отношеніе $\smile \frac{AB}{R} = \alpha$ служитъ мѣрою угла BOA, которая и обозначена буквою α.

Раздѣливъ равенство

$$1 = 1 = 1$$

на предыдущее двойное неравенство получаемъ:

$$\frac{1}{tg\,\alpha} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{Sin\,\alpha}$$

Умноживъ всѣ три дроби на $Sin\,\alpha$ имѣемъ:

$$\frac{Sin\,\alpha}{tg\,\alpha} < \frac{Sin\,\alpha}{\alpha} < 1$$

или

$$cos\,\alpha < \frac{Sin\,\alpha}{\alpha} < 1$$

а такъ какъ разность $1 - cos\,\alpha$ при безконечно маломъ α есть также безконечно малая, то значитъ и разность

$$1 - \frac{Sin\,\alpha}{\alpha}$$

есть безконечно малая, а значитъ

$$\text{пред.}\ \frac{Sin\,\alpha}{\alpha} = 1.$$

Очевидно, что

$$\frac{tg\,\alpha}{\alpha} = \frac{Sin\,\alpha}{\alpha\,cos\,\alpha} = \frac{Sin\,\alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{cos\,\alpha}$$

значитъ

$$\text{пред.}\ \frac{tg\,\alpha}{\alpha} = \text{пред.}\ \frac{Sin\,\alpha}{\alpha} \cdot \text{пред.}\ \frac{1}{cos\,\alpha} = 1$$

т. е. предѣлъ отношенія тангѐнса безконечно малаго угла къ отвлеченному числу измѣряющему этотъ уголъ равенъ 1.

Задача. Опредѣлить такое значеніе угла α, чтобы разность $1 - \frac{Sin\,\alpha}{\alpha}$ была меньше назначеннаго числа ε напр. $\frac{1}{1000.000}$ и для всѣхъ меньшихъ значеній α оставалась меньше ε.

§ 16. Предѣлъ, къ которому стремится выраженіе $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ при α безконечно маломъ, имѣетъ весьма важное значеніе въ анализѣ.

Чтобы найти этотъ предѣлъ, мы различимъ два случая:

1) когда $\frac{1}{\alpha}$ есть цѣлое и положительное число;

2) когда $\frac{1}{\alpha}$ не есть цѣлое и положит. число.

Разберемъ первый случай, очевидно что когда $\frac{1}{\alpha} = n$, то n есть безконечно больше число, ибо α безконечно малая.

Мы получимъ:

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\,\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n^2} +$$

$$+ \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots$$

Очевидно

$$n\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{1}$$

$$\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{1}{1.2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{n^3} = \frac{1}{1.2.3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

и слѣдовательно мы получимъ:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots +$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k+1}{n}\right) + \ldots$$

При увеличеніи n, дроби

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n}\ \ldots\ (\times)$$

неопредѣленно уменьшаются и мы получимъ

$$\text{пред. } (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \text{пред. } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} +$$

$$+ \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots$$

Замѣтимъ, что въ ряду дробей (×) будутъ заключаться и такія дроби

$$\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}$$

которыхъ числитель также безконечно великъ одновременно съ n и которыя не пропадаютъ въ предѣлѣ, но легко показать что сумма всѣхъ членовъ, гдѣ такія дроби содержатся въ предѣлѣ исчезаетъ, а слѣдовательно, члены съ такими дробями не вліяютъ на величину вышеуказаннаго предѣла.

Члены въ которые входятъ дроби

$$\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \ldots$$

можно представить въ видѣ:

$$S_k = \frac{1}{1.2\ldots(k-1)}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{k+2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k+1}{n}\right)+\ldots\right]$$

очевидно что эта сумма меньше слѣдующей

$$S_k < \frac{1}{1.2.3\ldots(k+1)}\left[1+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)}+\ldots\right]$$

которая въ свою очередь меньше такой:

$$S_k < \frac{1}{1.2\ldots(k+1}\left[1+\frac{1}{(k+2)}+\frac{1}{(k+2)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(k+2)^3}+\ldots\right]$$

или

$$S_k < \frac{1}{1.2\ldots(k+1)}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{k+2}}$$

очевидно, что при k безконечно большомъ, предѣлъ правой части есть нуль, а слѣдовательно

$$\text{пред. } S_k = 0$$

т. е. сумма всѣхъ тѣхъ членовъ въ которыхъ входятъ дроби $\frac{k}{n}$, $\frac{k+1}{n}$, ... не уничтожающихся въ предѣлѣ, сама уничтожается, а слѣдовательно

$$\text{пред.}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots.+$$
$$+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.k}+\ldots.$$

Число, опредѣляемое этимъ рядомъ, принято обозначать буквою e и его нетрудно вычислить съ любою степенью точности; для этого стоитъ только показать величину той погрѣшности, которую мы сдѣлаемъ взявъ сумму первыхъ k членовъ ряда и отбросивъ всѣ остальные.

Сумма этихъ отброшенныхъ членовъ которую обозначимъ черезъ P_k будетъ:

$$P_k = \frac{1}{1\,.\,2\ldots.k}\left\{\frac{1}{(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\ldots.+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(k+1)(k+2)\ldots.}\right\}$$
$$< \frac{1}{1\,.\,2\ldots.k}\left\{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^3}+\ldots.\right\}$$
$$< \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.k}+\frac{\frac{1}{k+1}}{1-\frac{1}{k+1}}$$

или

$$P_k < \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.k}\cdot\frac{1}{k}$$

Слѣдовательно, если вычисляя сумму первыхъ членовъ ряда мы остановимся на $K^{омъ}$ членѣ, то сдѣлаемъ погрѣшность (отбросивъ всѣ прочія) меньшую послѣдняго изъ удержанныхъ членовъ раздѣленнаго на число взятыхъ членовъ.

Такъ получимъ:

$$1+\frac{1}{1} = 2$$
$$\frac{1}{1\,.\,2} = 0{,}5$$
$$\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} = 0{,}16666\ 66666\ 66\ldots.$$

$$\frac{1}{1.2.3.4} = 0{,}04166\ 66666\ 66$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5} = 0{,}00833\ 33333\ 33$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6} = 0{,}00138\ 88888\ 88$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} = 0{,}00019\ 84126\ 98$$

$$\frac{1}{1.2.\ldots\ldots.8} = 0{,}00002\ 48005\ 87$$

$$\frac{1}{1.2.\ldots\ldots.9} = 0{,}00000\ 27557\ 31$$

$$\frac{1}{1.2.\ldots\ldots.10} = 0{,}00000\ 02755\ 73$$

$$\frac{1}{1.2.\ldots\ldots.11} = 0{,}00000\ 00250\ 52$$

$$\frac{1}{1.2.\ldots\ldots.12} = 0{,}00000\ 00020\ 87$$

$$\frac{1}{1.2.\ldots\ldots.13} = 0{,}00000\ 00001\ 60$$

$$\frac{1}{1.2.\ldots\ldots.14} = 0{,}00000\ 00000\ 11$$

$$\frac{1}{1.2.\ldots\ldots.15} = 0{,}00000\ 00000\ 007$$

$$2{,}71828\ 18284$$

Сложивъ эти числа имѣемъ:

$$e = 2{,}71828\ 1828\ldots\ldots$$

гдѣ всѣ знаки вѣрны.

Мы нашли такимъ образомъ предѣлъ выраженія $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, когда $\frac{1}{\alpha}$ есть цѣлое и положительное число, покажемъ теперь, что, когда $\frac{1}{\alpha}$ не есть таковое, предѣлъ остается тотъ-же самый.

Подраздѣлимъ этотъ случай на два:

а) $\frac{1}{\alpha}$ положительное не цѣлое; б) $\frac{1}{\alpha}$ отрицательное.

Когда $\frac{1}{\alpha}$ положительное не цѣлое то всегда есть два такихъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа m и $m+1$ между коими $\frac{1}{\alpha}$ заключается такъ, что

$$m < \frac{1}{\alpha} < m+1 \ldots (\times)$$

значитъ

$$\frac{1}{m} > \alpha > \frac{1}{m+1} \quad .$$

и слѣдовательно:

$$1 + \frac{1}{m} > 1 + \alpha > \frac{1}{m+1}$$

возвышая въ степень $\frac{1}{\alpha}$ имѣемъ:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

въ силу неравенства $(\times)$ можно написать

$$\frac{1}{\alpha} = m + \lambda$$

и

$$\frac{1}{\alpha} = (m+1) - \mu$$

гдѣ λ и μ положительныя величины меньшія 1 и слѣдовательно будетъ:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+\lambda} > (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1-\mu}$$

или, обозначая $m+1$ одною буквою ρ, имѣемъ:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\lambda} > (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(1 + \frac{1}{\rho}\right)^{\rho} : \left(1 + \frac{1}{\rho}\right)^{\mu} \quad (\times\times)$$

переходя къ предѣлу имѣемъ:

$$\text{пред.}\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\lambda}\right] =$$

$$= \text{пред.}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} \cdot \text{пред.}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\lambda} = e$$

$$\text{пред.}\left[\left(1 + \frac{1}{\rho}\right)^{\rho} : \left(1 + \frac{1}{\rho}\right)^{\mu}\right] =$$

$$= \frac{\text{пред.}\left(1 + \frac{1}{\rho}\right)^{\rho}}{\text{пред.}\left(1 + \frac{1}{\rho}\right)^{\mu}} = \frac{e}{1} = e;$$

очевидно что и промежуточная часть неравенства $(\times\times)$ имѣетъ тотъ же предѣлъ какъ и обѣ крайнихъ, для коихъ онъ общій, значитъ:

$$\text{пред. } (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

при всякомъ *положительномъ* безконечно маломъ α.

Наконецъ, когда α отрицательное, то пусть

$$\alpha = -\beta$$

тогда

$$1+\alpha = 1-\beta$$

и

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = (1-\beta)^{-\frac{1}{\beta}}.$$

Положимъ

$$1-\beta = \frac{1}{1+\gamma},$$

откуда

$$\beta = \frac{\gamma}{1+\gamma}$$

и значитъ:

$$(1-\beta)^{-\frac{1}{\beta}} = \left(\frac{1}{1+\gamma}\right)^{-\frac{1+\gamma}{\gamma}} = (1+\gamma)^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} =$$

$$= (1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} . (1+\gamma)$$

и слѣдовательно

$$\text{пред. } (1-\beta)^{-\frac{1}{\beta}} = \text{пред. } (1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} . \text{пред. } (1+\gamma) = e,$$

ибо γ положительная безконечно малая величина.

Такимъ образомъ имѣемъ теорему: *предѣлъ выраженія* $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ *при всякомъ безконечно маломъ* α *равенъ числу* e *опредѣляемому рядомъ:*

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots k} + \ldots$$

Предѣлы выраженій. $\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}$ и $\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}$

§ 17. Пользуясь теоремой доказанной въ предыдущемъ § легко найти предѣлы слѣдующихъ выраженій:

$$\text{пред. } \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}$$

и

$$\text{пред. } \frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}.$$

Очевидно имѣемъ:

$$\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha},$$

но такъ какъ предѣлъ выраженія $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ есть e, то предѣлъ его логариѳма будетъ $\log e$ и слѣдовательно:

$$\text{пред. } \log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \text{пред. } \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} = \log e.$$

Число e принято за основаніе такъ называемыхъ Неперовыхъ или натуральныхъ логариѳмовъ, поэтому условившись подъ знакомъ $\log N$ разумѣть Неперовъ логариѳмъ числа N, будемъ имѣть:

$$\text{пред. } \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} = 1.$$

По теоремѣ доказанной въ § 15.

$$\text{пред. } a^{\alpha} = 1.$$

Слѣдовательно разность

$$a^{\alpha} - 1.$$

безконечно малая одновременно съ α. Найдемъ предѣлъ отношенія $\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}$.

Пусть

$$a^{\alpha} - 1 = \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Величина β безконечно малая вмѣстѣ съ α.

Изъ равенства (1) слѣдуетъ:

$$\alpha \log a = \log (1 + \beta)$$

и

$$\alpha = \frac{\log(1+\beta)}{\log a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

и слѣдовательно въ силу равенствъ (1) и (2) будетъ:

$$\frac{a^{\alpha} - 1}{\alpha} = \frac{\beta}{\log (1+\beta)} \cdot \log a = \frac{\log a}{\frac{\log (1+\beta)}{\beta}}.$$

Значитъ

$$\text{пред.} \frac{a^{\alpha} - 1}{\alpha} = \frac{\log a}{\text{пред.} \frac{\log (1+\beta)}{\beta}} = \frac{\log a}{\log e} = \log a.$$

Итакъ: *Предѣлъ отношенія* $\frac{a^{\alpha} - 1}{\alpha}$ *при безконечно маломъ* α *равенъ Неперову логариѳму числа* a.

По поводу этого предѣла Лагранжъ въ Leçons sur le calcul des fonctions говоритъ, что Бриггсъ воспользовался именно этимъ предѣломъ для вычисленія логариѳмовъ. Дѣйствительно положивъ $\alpha = \frac{1}{n}$ будемъ имѣть:

$$\text{пред.} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \text{пред.} \left(\sqrt[n]{a} - 1\right) \cdot n = \log a$$

и если взять $n = 2^k$, то будетъ

$$\text{пред.} \left(\sqrt[2^k]{a} - 1\right) \cdot 2^k = \log a$$

и все вычисленіе сведется на извлеченіе корней квадратныхъ.

Такъ если положить $a = 10$, $k = 60$, то $n = 2^{60}$ и

$$\sqrt[n]{10} = 1,\ 00000\ 00000\ 00000\ 00199\ 71742\ 08125\ 50527\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n} = 0,\ 00000\ 00000\ 00000\ 00086\ 73617\ 37988\ 40354\ldots\ldots\ldots$$

Откуда $\log 10 = \dfrac{199\ 71742\ 08125\ 50527}{86\ 73617\ 37988\ 40354} = 2,\ 302585092994\ldots.$

Это число представляетъ собою такъ называемый модуль обыкновенной или десятичной системы логариѳмовъ.

Въ послѣдствіи мы покажемъ другіе болѣе простые пріемы вычисленія логариѳмовъ.

ГЛАВА II.

Производныя и дифференціалы функцій одной перемѣнной независимой. Правила дифференцированія.

§ 18. Математика издревле являлась не только сомостоятельною наукою, но и основою для другихъ, такъ называемыхъ прикладныхъ наукъ, въ которыхъ изучаются и устанавливаются количественныя соотношенія между разнаго рода величинами и явленіями, встрѣчающимися въ природѣ.

Во всякой прикладной наукѣ прежде всего избираютъ единицы для измѣренія тѣхъ величинъ, съ которыми придется имѣть дѣло и устанавливаютъ способы измѣренія этихъ величинъ. Тогда всякая величина будетъ опредѣляться числомъ, показывающимъ отношеніе ея къ величинѣ съ нею однородною и принятой за единицу. Такимъ образомъ, установленіе зависимости между разнаго рода величинами сводится къ установленію зависимости между числами, служащими для этихъ величинъ мѣрою.

Примѣрами такихъ прикладныхъ наукъ могутъ служить: *механика*, изучающая движеніе тѣлъ и причины его, — здѣсь

однимъ изъ главныхъ вопросовъ является вопросъ объ опредѣленіи положенія, принимаемаго даннымъ тѣломъ въ пространствѣ въ любой моментъ времени и изученіе послѣдовательнаго измѣненія этого положенія съ теченіемъ времени; *астрономія* изучающая движеніе небесныхъ тѣлъ; *физика* изучающая явленія свѣта, теплоты, электричества, магнетизма и т. д.

Зависимость между числами выражающими разсматриваемыя величины, которыя по большей части будутъ перемѣнными, можетъ быть весьма разнообразною. Всякая такая зависимость будетъ выражаться нѣкоторою функціей этихъ перемѣнныхъ. Отсюда ясно, что изученіе общихъ свойствъ функцій, умѣніе изслѣдовать ихъ и пользоваться ими, является одинаково необходимымъ подспорьемъ для всѣхъ выше перечисленныхъ наукъ.

Понятно, что, при изученіи всякой данной функціи, прежде всего представляются слѣдующіе вопросы: какъ измѣняются значенія функціи въ связи съ измѣненіями значеній перемѣнной независимой, т. е. что дѣлается съ значеніями функціи, когда перемѣнная послѣдовательно переходитъ отъ наименьшаго изъ своихъ частныхъ значеній къ наибольшему: возрастаютъ ли тогда все время и значенія функціи или убываютъ, или на нѣкоторыхъ промежуткахъ возрастаютъ, на другихъ убываютъ; измѣняется ли функція вездѣ одинаково быстро; нѣтъ ли такихъ значеній перемѣнной при которыхъ функція принимаетъ наибольшее или наименьшее изъ своихъ значеній и т. п.?

Подобные-же вопросы являются и по отношенію функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ. Всѣ эти вопросы могутъ быть рѣшены помощью вполнѣ опредѣленныхъ правилъ, которыми мы и займемся въ нашемъ курсѣ.

Ясно, что необходимо начать разсмотрѣніе съ простѣйшаго изъ всѣхъ вышеупомянутыхъ вопросовъ, именно съ изученія совмѣстнаго измѣненія функціи одной независимой перемѣнной и этой перемѣнной и установленія соотношенія между такими измѣненіями.

Непрерывность функціи.

§ 19. Пусть будетъ

$$y = f(x)$$

нѣкоторая функція перемѣннаго независимаго x, тогда

$$f(a)$$

будетъ частное значеніе этой функціи соотвѣтствующее частному значенію

$$x = a$$

перемѣнной независимой.

Всякое другое частное значеніе x можетъ быть выражено суммою

$$a + h$$

гдѣ h положительное, отрицательное или даже мнимое число, которое надо прибавить къ a, чтобы получить упомянутое новое частное значеніе x.

Число h называютъ *приращеніемъ* значенія a; вмѣсто слова приращеніе ставятъ букву Δ и выговариваютъ равенство

$$h = \Delta a$$

h «есть приращеніе отъ a».

При новомъ значеніи $x = a + h = a + \Delta a$. Значеніе функціи $f(x)$ будетъ:

$$f(a + h) = f(a + \Delta a).$$

Насколько это значеніе больше или меньше прежняго найдемъ, взявъ разность

$$f(a + h) - f(a) = f(a + \Delta a) - f(a).$$

Эта разность выражаетъ приращеніе значенія $f(a)$ и слѣдовательно, по сдѣланному относительно знака Δ условію, мы можемъ написать:

$$f(a + \Delta a) - f(a) = \Delta f(a).$$

Вообще для какого угодно значенія x перемѣнной независимой будетъ

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta f(x).$$

Это равенство служитъ опредѣленіемъ приращенія функціи $f(x)$.

Функція $f(x)$ называется **непрерывною** *въ сопредѣльности съ частнымъ значеніемъ $x = a$ перемѣнной независимой, если приращеніе функціи или, что одно и тоже, разность*

$$f(a+h) - f(a)$$

будетъ безконечно малою при **произвольномъ** *положительномъ или отрицательномъ, безконечно маломъ приращеніи h частнаго значенія a перемѣнной независимой.*

Если функція указаннымъ въ приведенномъ опредѣленіи свойствамъ при $x = a$ не обладаетъ, то говорятъ, что при $x=a$ она претерпѣваетъ разрывъ непрерывности.

Само собою разумѣется, что въ этомъ опредѣленіи предполагается, что при $x = a$ значеніе функціи $f(a)$ конечное и опредѣленное.

Функція называется непрерывною для даннаго промежутка отъ $x = a$ до $x = b$, если она непрерывна въ сопредѣльности со всякимъ частнымъ значеніемъ c лежащимъ въ данномъ промежуткѣ.

Для всякой непрерывной функціи нетрудно обобщить доказанныя выше теоремы о предѣлахъ, а именно: если функція $y = f(x)$ непрерывна въ промежуткѣ отъ $x = a$ до $x = b$, то для всякаго значенія c, заключеннаго между a и b, имѣетъ мѣсто равенство:

$$\underset{x=c}{\text{пред.}}\, f(x) = f(c) = f\,[\text{пред. } x].$$

Въ самомъ дѣлѣ по опредѣленію предѣла имѣемъ:

$$x = c + \varepsilon$$

въ силу-же опредѣленія непрерывности будетъ:

$$f(x) = f(c + \varepsilon) = f(c) + \delta$$

гдѣ δ безконечно малая величина одновременно съ ε, отсюда слѣдуетъ, что

$$\underset{x=c}{\text{пред.}}\, f(x) = f(c) = f(\text{пред. } x).$$

Примѣръ 1-й. Пусть n цѣлое и положительное число, легко показать, что функція x^n непрерывна въ сопредѣльности со всякимъ частнымъ значеніемъ перемѣнной x. Пусть x будетъ какое угодно изъ этихъ частныхъ значеній: тогда

$$\Delta(x^n) = (x + \Delta x)^n - x^n = \left| nx^{n-1} + \frac{n-1}{1 \cdot 2}\, x^{n-2}\Delta x + \ldots + \right.$$
$$\left. + (\Delta x)^{n-1} \right| \cdot \Delta x$$

очевидно, что когда Δx безконечно-малое, то и произведеніе

$$\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\, x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1} \right] \cdot \Delta x$$

будетъ безконечно-малое при всякомъ конечномъ значеніи x, слѣдовательно по опредѣленію функція x^n есть непрерывная при всякомъ значеніи перемѣнной x.

Примѣръ 2-й. Не трудно видѣть, что функція

$$\frac{1}{x-3}$$

претерпѣваетъ разрывъ непрерывности при $x = 3$, обращаясь при этомъ въ ∞, для остальныхъ же значеній эта функція непрерывна.

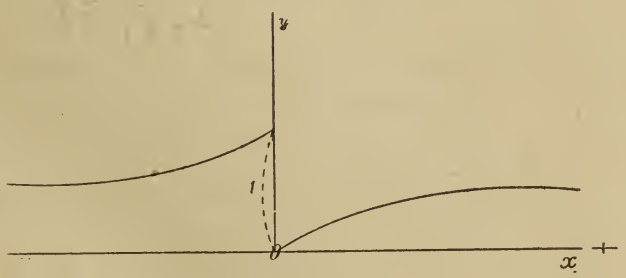
Примѣръ 3-й. Функція

$$y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$$

при $x = o$ претерпѣваетъ разрывъ непрерывности, дѣлая скачекъ отъ $y = o$ къ $y = 1$. Въ самомъ дѣлѣ, если x принимаетъ неопредѣленно убывающія *положительныя* значенія, то дробь $\frac{1}{x}$ оставаясь положительной неопредѣленно возрастаетъ, вмѣстѣ съ чѣмъ неопредѣленно возрастаетъ и величина $2^{\frac{1}{x}}$, слѣдовательно значенія функціи приближаются къ нулю. Когда-же x, оставаясь *отрицательнымъ*, будетъ принимать все меньшія и меньшія значенія, то показатель $\frac{1}{x}$, будучи отрицательнымъ, будетъ по абсолютной величичинѣ неопредѣленно возрастать, значитъ $2^{\frac{1}{x}}$ будетъ приближаться къ нулю и функція y будетъ приближаться къ 1.

Такимъ образомъ вблизи значеній $x = o$ ходъ функціи представится такимъ чертежомъ (черт. 5):

Черт. 5.

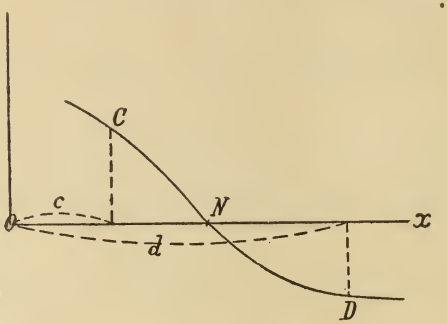


Изъ понятія о непрерывности функціи можно убѣдиться въ справедливости слѣдующаго свойства: *если функція $f(x)$, непрерывная въ промежуткѣ отъ $x = a$ до $x = b$, при нѣкоторомъ значеніи $x = c$ лежащемъ между a и b имѣетъ положительное значеніе и при $x = d$, лежащемъ въ томъ же промежуткѣ значеніе этой функціи отрицательное, то при нѣкоторомъ $x = \xi$ лежащемъ между d и c функція $f(x)$ обращается въ нуль, т. е. $f(\xi) = 0$.*

Мы примемъ это свойство за очевидное, которое достаточно поясняется графическимъ представленіемъ непрерывной функціи

въ видѣ «непрерывной» линіи, а такая линія не можетъ перейти съ одной стороны оси x-овъ на другую не пересѣкая ея по крайней мѣрѣ одинъ разъ въ нѣкоторой точкѣ N (черт. 6).

Черт. 6.



Замѣтимъ однако, что это свойство можетъ быть доказано съ полною строгостью чисто аналитически, не прибѣгая къ чертежу.

Приращеніе функціи. Производная функціи.

§ 20. Всѣ функціи, съ которыми намъ придется имѣть дѣло окажутся непрерывными для всѣхъ знаній перемѣнной независимой, кромѣ нѣкоторыхъ, при которыхъ эти функціи претерпѣваютъ разрывъ, обращаясь при этомъ обыкновенно въ безконечность и мѣняя знакъ подобно тому какъ, напримѣръ, функція $\frac{1}{x-3}$ при $x=3$ или фунція $\operatorname{tg} x$ при $x=\frac{\pi}{2}$.

Ближайшимъ вопросомъ при изученіи функціи въ смежности съ тѣми значеніями перемѣнной, при которыхъ она остается непрерывною, является вопросъ о быстротѣ ея измѣненія по сравненію съ измѣненіемъ перемѣнной независимой.

Чтобы пояснить, что мы разумѣемъ подъ «быстротою» измѣненія функціи возьмемъ сперва простѣйшій примѣръ.

Пусть напримѣръ будетъ

$$y=2x+3;$$

если перемѣнной независимой x дать какое либо приращеніе

$\Delta x = h$, то и функція y получитъ нѣкоторое приращеніе $\Delta y = k$, величина котораго найдется, взявъ разность приращеннаго и первоначальнаго значенія функціи, именно будетъ:

$$k = [2\ (x + h) + 3] - [2x + 3] = 2h.$$

Итакъ, между приращеніемъ Δy функціи и приращеніемъ Δx перемѣнной независимой, въ нашемъ примѣрѣ имѣетъ мѣсто соотношеніе:

$$\Delta y = 2 \cdot \Delta x$$

т. е. что приращеніе функціи вдвое больше приращенія перемѣнной независимой, иными словами, что функція возрастаетъ вдвое «быстрѣе» перемѣнной.

Такимъ образомъ, на этомъ примѣрѣ мы видимъ, что для сужденія о быстротѣ возрастанія функціи надо взять отношеніе приращенія функціи къ приращенію перемѣнной независимой.

Въ разсмотрѣнномъ частномъ случаѣ это отношеніе оказалось *постояннымъ*, т. е. независящимъ ни отъ x ни отъ h.

Въ общемъ случаѣ этого не будетъ.

Такъ возьмемъ такой примѣръ:

$$y = 2x^2 + 3x + 5.$$

Приращеніе функціи будетъ:

$$\Delta y = k = [2\ (x + h)^2 + 3\ (x + h) + 5] - [2x^2 + 3x + 5] =$$
$$= 4xh + 2h^2 + 3h = (4x + 3)\ h + 2h^2$$

и отношеніе

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k}{h} = (4x + 3) + 2h$$

зависитъ какъ отъ x, такъ и отъ h.

Такимъ образомъ, если бы мы стали судить о быстротѣ измѣненія функціи въ смежности съ даннымъ частнымъ значеніемъ перемѣнной независимой по величинѣ отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то

мы стали бы получать (даже при одномъ и томъ-же заданномъ значеніи x) *различныя* величины этого отношенія, смотря по тому, какое значеніе мы бы взяли для h.

Но если придавать величинѣ h все меньшія и меньшія значенія, приближая h къ нулю, иначе говоря, считать эту величину безконечно-малою, то разсматриваемое отношеніе будетъ приближаться къ опредѣленному предѣлу (въ нашемъ случаѣ $4x + 3$) зависящему только отъ x и независящему отъ h. Этотъ-то предѣлъ и будетъ служить мѣрою быстроты измѣненія данной функціи въ смежности съ разсматриваемымъ значеніемъ перемѣнной независимой x.

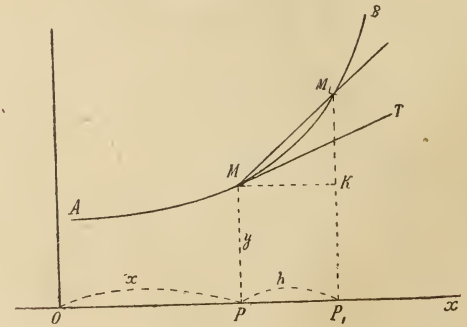
Геометрическое представленіе можетъ еще болѣе способствовать уясненію разсматриваемаго понятія.

Пусть кривая AB (черт. 7) изображаетъ заданную функцію

$$y = f(x)$$

положимъ, что абсциссѣ x придано частное значеніе $x = OP$,

Черт. 7.



соотвѣтствующее значеніе функціи есть $y = PM$. Если абсциссѣ дать приращеніе $PP_1 = h$, то соотвѣтствующая ордината будетъ $y + \Delta y = f(x + h) = P_1M_1$ и слѣдовательно на нашемъ чертежѣ приращеніе функціи Δy изобразится величиною

$$KM_1 = P_1M_1 - PM.$$

Отношеніе

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{KM_1}{PP_1} = \frac{KM_1}{MK} = \operatorname{tg} M_1MK$$

представляетъ собою тангенсъ угла уклона сѣкущей MM_1 къ оси x-овъ. Если бы этотъ уклонъ оставался постояннымъ, независимо отъ x и h, какъ то было бы если бы вмѣсто кривой AB мы имѣли прямую, съ которой тогда бы MM_1 сливалось, то упомянутый тангенсъ и служилъ бы мѣрою быстроты измѣненія функціи, показывая вмѣстѣ съ тѣмъ и направленія этого измѣненія, т. е. увеличиваются ли значенія функціи съ увеличеніемъ значеній перемѣнной независимой или уменьшаются. Въ первомъ случаѣ этотъ тангенсъ положительный и функція называется *возрастающей*, во второмъ отрицательный и функція— *убывающая*.

Въ общемъ же случаѣ, даже сохраняя точку M и измѣняя лишь h, т. е. беря разныя точки M_1 мы будемъ получать различныя сѣкущія имѣющія и различные уклоны; но если приближать h къ нулю то точка M_1 приближается къ M и сѣкущая MM_1 будетъ приближаться къ предѣльному положенію, представляющему собою касательную MT къ разсматриваемой кривой въ точкѣ M. Тангенсъ угла уклона этой касательной и представляетъ собою быстроту измѣненія функціи $f(x)$ при разсматриваемомъ значеніи перемѣнной независимой $x = OP$.

Чѣмъ этотъ тангенсъ или уклонъ больше, тѣмъ, такъ сказать, кривая идетъ «круче» къ оси x-овъ и тѣмъ «быстрѣе» измѣняется ея ордината y, причемъ знакъ этого тангенса укажетъ возрастаетъ ли функція или убываетъ. Такимъ образомъ мѣрою быстроты измѣненія функціи служитъ тотъ предѣлъ, къ которому стремится отношеніе приращенія функціи къ соотвѣтствующему безконечно-малому приращенію перемѣнной независимой. Этому предѣлу, въ виду его важности для изученія функціи даютъ особое названіе именно *производной* отъ этой функціи.

Итакъ, мы имѣемъ слѣдующее опредѣленіе:

Производною отъ данной функціи называется предѣлъ отношенія ея приращенія къ приращенію перемѣнной независимой, когда послѣднее безконечно-мало.

Пусть

$$y = f(x)$$

есть упомянутая въ опредѣленіи функція, то принято обозначать ея производную знакоположеніемъ

$$y' = f'(x)$$

и предыдущее опредѣленіе выражается такимъ равенствомъ:

$$y' = \text{пред.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$f'(x) = \text{пред.}\ \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \text{пред.}\ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Если отношеніе $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ при безконечно-маломъ Δx не стремится ни къ какому опредѣленному предѣлу, то предложенная функція $f(x)$ производной неимѣетъ.

Такъ какъ $f'(x)$ есть предѣлъ дроби $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, то сама эта дробь отличается отъ своего предѣла на безконечно-малую величину, обозначая которую черезъ ε имѣемъ равенство:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon.$$

Откуда

$$\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$$

или иначе:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x, \text{ т. е.}$$

Приращеніе функціи соотвѣтствующее безконечно-малому приращенію перемѣнной независимой равно произведенію ея производной на приращеніе перемѣнной независимой плюсъ безконечно-малый членъ высшаго порядка.

§ 21. Высказанное въ § 20 опредѣленіе даетъ возможность находить производныя различныхъ функцій.

Пусть напр. будетъ

$$y = x^3 + 2x^2 + 3x + 7$$

требуется найти y'.

Положимъ, что x получаетъ приращеніе $\Delta x = h$, соотвѣтствующее приращеніе функціи y, т. е. Δy будетъ:

$$\Delta y = [(x+h)^3 + 2(x+h)^2 + 3(x+h) + 7] - (x^3 + 2x^2 + 3x + 7) =$$
$$= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2x^2 + 4xh + 2h^2 + 3x + 3h + 7 - (x^3 + 2x^2 + 3x + 7) =$$
$$= (3x^2 + 4x + 3)h + (3x + 2)h^2 + h^3.$$

Слѣдовательно

$$y' = \text{пред.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}\ \text{пред.}\ \frac{(3x^2 + 4x + 3)h + (3x + 2)h^2 + h^3}{h} =$$

$$= \text{пред.}\,[(3x^2 + 4x + 3) + (3x + 2)h + h^2)] = 3x^2 + 4x + 3.$$

Итакъ:

$$y' = (x^3 + 2x^2 + 3x + 7)' = 3x^2 + 4x + 3.$$

Такой непосредственный способъ нахожденія производной, для функціи, сколь нибудь сложной, привелъ бы къ весьма длиннымъ и утомительнымъ выкладкамъ. Поэтому для нахожденія производныхъ поступаютъ иначе, такъ сказать, разчленяя вопросъ на его простѣйшіе элементы.

Функція отъ функціи.

§ 22. Всѣ функціи, съ которыми намъ придется имѣть дѣло, составляются изъ немногихъ простѣйшихъ при помощи тѣхъ же дѣйствій, которыя служатъ для составленія этихъ простѣйшихъ функцій по ихъ перемѣнной независимой.

Такъ напр. пусть будетъ

$$y = \sqrt[3]{\cos\,(7\ \text{arc tg}\ x)}.$$

Дѣйствія, которыя надо совершить надъ какимъ бы то ни было частнымъ значеніемъ перемѣнной x для полученія соотвѣтствующаго y, слѣдующія:

1) надо по данному x найти arc tg x, т. е. такой уголъ заключенный между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, тангенсъ котораго равенъ x; пусть этотъ уголъ есть z, такъ что

$$z = \text{arc } tg\ x$$

2) надо уголъ z умножить на 7, получится новый уголъ u, такой что

$$u = 7\ z$$

3) по аргументу u надо найти косинусъ его, пусть будетъ

$$v = \cos\ u$$

4) наконецъ для полученія y надо изъ величины v извлечь кубичный корень, такъ что

$$y = \sqrt[3]{v}.$$

Такимъ образомъ для полученія значенія y по данному значенію x надо произвести рядъ элементарныхъ дѣйствій, слѣдующихъ одно за другимъ въ опредѣленной послѣдовательности. Первое изъ этихъ дѣйствій производится надъ самою перемѣнною независимой, всѣ остальныя надъ нѣкоторыми ея функціями.

Условимся говорить, что *когда задана нѣкоторая функція $y = F(u)$ отъ перемѣнной u, которая въ свою очередь есть функція перемѣнной x, то y есть функція отъ функціи.*

Производная функція отъ функціи.

§ 23. Покажемъ, теперь, какъ связана производная функція отъ функціи съ производными тѣхъ простѣйшихъ функцій, изъ которыхъ данная функція образуется.

Пусть будетъ

$$y = F(u)$$

гдѣ $u = f(x)$ и x есть перемѣнная независимая, тогда y есть функція отъ функціи. Для полученія производной надо взять предѣлъ отношенія:

$$y' = \text{пред. } \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Когда вмѣсто x будетъ подставлено $x + \Delta x$, то:

u обратится въ $u + \Delta u$

y обратится въ $y + \Delta y$

уравненіе

$$y = F(u)$$

братится въ такое:

$$y + \Delta y = F(u + \Delta u)$$

ычтя изъ котораго предыдущее, имѣемъ:

$$\Delta y = F(u + \Delta u) - F(u).$$

Раздѣливъ на Δx получаемъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(u+\Delta u) - F(u)}{\Delta x} = \frac{F(u+\Delta u) - F(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \ldots \quad (*)$$

ереходя къ предѣлу видимъ, что

$$\text{пред. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \text{ и пред. } \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'.$$

Что же касается предѣла дроби $\frac{F(u+\Delta u) - F(u)}{\Delta u}$, то числитель я есть приращеніе функціи $F(u)$ по перемѣнной u, а знаменатель приращеніе этой перемѣнной, значитъ предѣлъ этой роби есть производная отъ функціи $F(u)$, принимая въ ней за перемѣнную независимую. Эту производную обозначимъ по прежнему черезъ $F'(u)$ такъ что:

$$\text{пред. } \frac{F(u+\Delta u) - F(u)}{\Delta u} = F'(u)$$

слѣдовательно уравненіе (*) даетъ:

$$y' = F'(u) \cdot u' \quad \ldots \quad (1)$$

Что выражаетъ такую теорему о производной функціи отъ функціи:

Если y есть функція $F(u)$ отъ перемѣнной u, гдѣ u сама есть функція отъ перемѣнной независимой x, то производная y равняется производной отъ $F(u)$, взятой считая u за перемѣнную независимую, умноженной на производную отъ u.

Эта теорема сводитъ розысканіе производныхъ какихъ угодно функцій къ нахожденію производныхъ тѣхъ немногихъ простѣйшихъ, изъ которыхъ другія функціи составляются.

Производныя простѣйшихъ функцій

§ 24. За простѣйшія функціи мы примемъ слѣдующія: $ax + b$; x^n; $log\ x$; a^x, $sin\ x$, $cos\ x$, $tg\ x$, $cotg\ x$, $arc\ sin\ x$, $arctg\ x$. Кромѣ того намъ надо будетъ показать, какъ находится производная алгебраической суммы нѣсколькихъ функцій, произведенія и частнаго.

Производная $ax + b$.

Итакъ пусть будетъ

$$y = a\,x + b.$$

По опредѣленію производной имѣемъ:

$$y = \underset{h=o}{\text{пред.}} \frac{[a\,(x+h)+b] - [a\,x+b]}{h} = a.$$

Слѣдовательно:

$$(a\,x + b)' = a \quad \ldots\ldots (1).$$

Изъ этой формулы слѣдуетъ: 1) если положить $a = 1$, что

$$(x + b)' = 1.$$

2) если положить $a = O$ то будетъ

$$(b)' = O$$

т. е. что производная постоянной величины равна нулю.

3) если положить $a = 1$ и $b = O$, то будетъ $(x)' = 1$, т. е. что производная перемѣнной независимой равна единицѣ.

4) если положить

$$y = a\,u$$

причемъ u есть какая угодно функція отъ x, то въ силу теоремы о производной функціи отъ функціи будетъ

$$y' = a \cdot u'$$

или

$$(a\,u)' = a.\,u'.$$

Это свойство выражаютъ словами такъ: постоянный множитель можно выносить за знакъ производной.

Производная $\log x$.

Найдемъ теперь производную логариѳма. Пусть будетъ:

$$y = log\ x.$$

По опредѣленію производной имѣемъ:

$$y' = \underset{h=o}{\text{пред.}} \frac{log\,(x+h) - log\,x}{h} = \text{пред.}\ \frac{log\frac{x+h}{x}}{h} =$$

$$= \text{пред.}\ \frac{log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} \quad \ldots \quad (2).$$

Такъ какъ h есть безконечно малая величина, то таковою же будетъ и величина $\frac{h}{x}$, обозначимъ эту величину черезъ α т. е. положимъ

$$\frac{h}{x} = \alpha$$

тогда

$$h = \alpha\,x.$$

Подставляя въ формулу (2) имѣемъ:

$$y' = \text{пред.}\ \frac{\log\,(1+\alpha)}{\alpha\,x} = \text{пред.}\ \frac{1}{x} \cdot \frac{\log\,(1+\alpha)}{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \text{пред.}\ \log\ (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Но мы видѣли, что

$$\text{пред. } (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Значитъ

$$\text{пред. } \log (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \log e.$$

Слѣдовательно будетъ:

$$y' = (\log x)' = \frac{1}{x} \cdot \log e \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (3).$$

если за основаніе системы логариѳмовъ взять число e то $\log e = 1$ и тогда будетъ

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (3').$$

Во всѣхъ формулахъ, которыя будутъ встрѣчаться въ дальнѣйшемъ изложеніи, мы всегда будемъ предполагать, что логариѳмы взяты именно такой системы. Эти логариѳмы, какъ уже было сказано, называются Неперовыми, въ отличіе отъ обыкновенныхъ, основаніемъ которыхъ служитъ 10.

Въ силу теоремы о производной функціи отъ функціи, если будетъ дано

$$y = \log u$$

причемъ u есть данная функція отъ x, то производная y выразится такъ

$$y' = \frac{1}{u} \cdot u'.$$

Такъ напримѣръ, если

$$y = \log (7x + 5)$$

то будетъ:

$$y' = \frac{1}{7x+5} (7x + 5)' = \frac{7}{7x+5}.$$

Производная x^n.

Пусть будетъ дано

$$y = x^n$$

причемъ n есть какое угодно цѣлое дробное, положительное или отрицательное число. Надо найти производную отъ этой функціи.

Взявъ логариѳмы обѣихъ частей, имѣемъ

$$\log y = n \,.\, \log x.$$

Беря теперь производную обѣихъ частей этого равенства имѣемъ:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = n \cdot \frac{1}{x}$$

Откуда слѣдуетъ:

$$y' = n \,.\, \frac{y}{x}$$

или замѣняя y его величиною получимъ

$$y' = n\, x^{n-1},$$

то-есть

$$(x^n)' = n\, x^{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Такъ напримѣръ:

$$(x^4)' = 4\, x^3$$

$$\left(\frac{1}{x^5}\right)' = \left(x^{-5}\right)' = -\,5\, x^{-6} = \frac{-5}{x^6}$$

Обратимъ вниманіе на случай $n = \frac{1}{2}$, тогда

$$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

и по фор. (4) будетъ

$$y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Въ силу теоремы о производной функціи отъ функціи будетъ:

$$(u^n)' = n\, u^{n-1} \cdot u'$$

Такъ напримѣръ если

$$y = (x^2 + 3)^5$$

то будетъ:

$$y' = 5\,(x^2 + 3)^4 \cdot (x^2 + 3)' = 5 \cdot (x^2 + 3)^4 \cdot 2\,x = \\ = 10\,x\,(x^2 + 3)^4.$$

Точно также если

$$y = \sqrt{5\,x^3 + 2}$$

то будетъ

$$y' = \frac{(5\,x^3 + 2)'}{2\sqrt{5\,x^3 + 2}} = \frac{15\,x^2}{2\sqrt{5\,x^3 + 2}}.$$

Производная показательной функціи. a^x и e^x

Пусть будетъ:

$$y = a^x.$$

Взявъ логариѳмы обѣихъ частей, имѣемъ равенство:

$$\log y = x \cdot \log a.$$

Такъ какъ a есть постоянная, то и $\log a$ есть постоянная.

Беря производныя обѣихъ частей предыдущаго равенства, имѣемъ:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \log a.$$

Откуда слѣдуетъ:

$$y' = y \cdot \log a = a^x \cdot \log a.$$

Итакъ:

$$(a^x)' = a^x \log a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Въ томъ случаѣ, когда $a = e$, то $\log a = 1$ и мы получимъ:

$$(e^x)' = e^x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Въ силу теоремы о производной функціи отъ функціи будетъ:

$$(e^u)' = e^u \cdot u'.$$

Такъ напримѣръ:

$$\left(e^{-\frac{x^2}{7}}\right)' = e^{-\frac{x^2}{7}} \cdot \left(-\frac{x^2}{7}\right)' = -\frac{2}{7}\,x \cdot e^{-\frac{x^2}{7}}.$$

Точно также

$$\left(e^{ax+b}\right)' = e^{ax+b}(ax+b)' = a\,e^{ax+b}.$$

§ 25. Покажемъ теперь, какъ найти: 1) производную алгебраической суммы нѣсколькихъ функцій, 2) произведенія двухъ или нѣсколькихъ функцій и 3) частнаго. Производная суммы, произведенія и частнаго.

1. Пусть будетъ:

$$y = u + v - w$$

причемъ u, v, w суть заданныя функціи отъ перемѣнной независимой x.

Положимъ, что эта перемѣнная получаетъ нѣкоторое приращеніе Δx, обозначимъ соотвѣтственно черезъ Δy, Δu, Δv, Δw приращенія принимаемыя функціями y, u, v, w.

Такимъ образомъ будемъ имѣть равенство:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \Delta w).$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \Delta w) - (u + v - w) = \\ = \Delta u + \Delta v - \Delta w.$$

Чтобы найти y', надо найти пред. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Въ силу же теоремы о предѣлѣ суммы имѣемъ:

$$\text{пред.}\frac{\Delta y}{\Delta y} = \text{пред.}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \text{пред.}\frac{\Delta v}{\Delta x} - \text{пред.}\frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Но по опредѣленію производной:

$$\text{пред.}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$
$$\text{пред.}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$$
$$\text{пред.}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$$
$$\text{пред.}\frac{\Delta w}{\Delta x} = w'$$

и предыдущее равенство напишется:

$$y' = u' + v' - w' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Легко видѣть, что подобное равенство имѣло бы мѣсто и при любомъ конечномъ числѣ слагаемыхъ, такимъ образомъ имѣемъ теорему: *Производная алгебраической суммы нѣсколькихъ функцій равна таковой же суммѣ ихъ производныхъ.*

Такъ напримѣръ когда

$$y = 5x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 1$$

то будемъ имѣть

$$y' = 20x^3 - 9x^2 + 14x - 2$$

точно также если:

$$y = \log (x + \sqrt{x})$$

то

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{x}+1}{2\,(x\sqrt{x}+x)}.$$

2. Найдемъ теперь производную произведенія нѣсколькихъ функцій.

Возьмемъ сперва случай двухъ множителей.

Пусть будетъ:

$$y = u \cdot v.$$

Слѣдовательно

$$\log y = \log u + \log v.$$

Взявъ производныя имѣемъ:

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

Откуда:

$$y' = y\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}\right) = u\,v\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}\right) = v\,u' + u\,v'.$$

Итакъ:

$$(u\,v)' = v\,u' + u\,v' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8),$$

т. е. *производная произведенія равняется второму множителю умноженному на производную перваго плюсъ первый множитель, умноженный на производную второго.*

Такъ напримѣръ:

$$\begin{aligned}(x^3 \cdot e^{2x})' &= e^{2x} \cdot (x^3)' + x^3 \cdot (e^{2x})' = \\ &= e^{2x} \cdot 3x^2 + x^3 \cdot e^{2x} \cdot 2 = \\ &= (3x^2 + 2x^3)\, e^{2x}.\end{aligned}$$

Положимъ теперь, что

$$y = u \cdot v \cdot w \ldots t;$$

тогда будетъ:

$$\log y = \log u + \log v + \log w + \ldots + \log t$$

и значитъ:

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \ldots + \frac{t'}{t}\,.$$

Откуда слѣдуетъ:

$$\begin{aligned}y' = v\,w \ldots t\,.\,u' + u\,w \ldots t\,.\,v' + u\,v \ldots t\,.\,w' + \ldots \\ + u\,.\,v\,.\,w \ldots t' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9),\end{aligned}$$

т. е. *производная отъ произведенія нѣсколькихъ множителей равна суммѣ, составленной изъ произведеній производныхъ каждаго множителя на всѣ остальные.*

Такъ напримѣръ, если

$$y = x\,\sqrt[3]{3x+7}\,.\,e^{5x},$$

то будетъ:

$$\begin{aligned}y' = \sqrt{3x+7} \cdot e^{5x} \cdot (x^3)' + x^3 \cdot e^{5x} \cdot (\sqrt{3x+7})' + \\ + x^3 \cdot \sqrt{3x+7}\,(e^{5x})' = 3\sqrt{3x+7} \cdot x^2 \cdot e^{5x} + \\ + \frac{3}{2\sqrt{3x+7}} \cdot x^3 \cdot e^{5x} + 5 \cdot x^3\,.\,\sqrt{3x+7} \cdot e^{5x}.\end{aligned}$$

3. Найдемъ теперь производную дроби.

Пусть будетъ:

$$y = \frac{u}{v}$$

причемъ u и v суть заданныя функціи перемѣнной независимой x.

Взявъ логариѳмы и затѣмъ производную, имѣемъ:

$$\log y = \log u - \log v$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}.$$

Откуда

$$y' = y\left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}\right)$$

подставляя вмѣсто y его величину $\frac{u}{v}$ и упрощая, имѣемъ:

$$y' = \frac{u}{v}\left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}\right) = \frac{v\,u' - u\,v'}{v^2}.$$

Итакъ:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v\,u' - u\,v'}{v^2} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

т. е. *производная дроби равняется разности произведеній знаменателя, умноженнаго на производную числителя минусъ числитель, умноженный на производную знаменателя, раздѣленной на квадратъ знаменателя.*

Такъ напримѣръ,

$$\left(\frac{e^{3x}}{x+1}\right)' = \frac{(x+1)\cdot(e^{3x})' - e^{3x}\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{3\,e^{3x}(x+1) - e^{3x}}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{3x+2}{(x+1)^2} \cdot e^{3x}.$$

Производныя тригонометрическихъ функцій.

§ 26. Найдемъ производныя главнѣйшихъ тригонометрическихъ функцій, — прямыхъ:

$$\operatorname{Sin} x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{cotg} x$$

и обратныхъ:

$$\operatorname{arc\,sin} x \text{ и } \operatorname{arc\,tg} x.$$

Производная Sin x.

1) Пусть будетъ:

$$y = \operatorname{Sin} x;$$

тогда по опредѣленію производной имѣемъ:

$$y' = \underset{h=o}{\text{пред.}} \frac{\operatorname{Sin}(x+h) - \operatorname{Sin} x}{h} = \text{пред.} \frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\operatorname{Sin}\frac{h}{2}}{h} =$$

$$= \text{пред. } \operatorname{Cos}\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\operatorname{Sin}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} =$$

$$= \text{пред. } \operatorname{Cos}\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot \text{пред. } \frac{\operatorname{Sin}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

Но:

$$\text{пред. } \operatorname{Cos}\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos x.$$

Что же касается предѣла отношенія $\frac{\operatorname{Sin}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$, то такъ какъ $\frac{h}{2}$ есть величина безконечно малая, то по доказанному въ § 15 будетъ

$$\text{пред. } \frac{\operatorname{Sin}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1.$$

Слѣдовательно, подставляя получимъ:

$$(\operatorname{Sin} x)' = \operatorname{Cos} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Замѣтимъ по поводу этой формулы, что, такъ какъ при выводѣ ея мы пользовались предѣломъ отношенія $\frac{\operatorname{Sin}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$, которое предполагаетъ, что аргументъ h выраженъ *отвлеченнымъ* числомъ, то значитъ и аргументъ x предполагается тоже выраженнымъ *отвлеченнымъ* числомъ.

Сопоставляя съ формулою 11 теорему о производной функціи отъ функціи, получимъ формулу

$$(\mathrm{Sin}\ u)' = \mathrm{Cos}\ u \cdot u'$$

причемъ u можетъ быть какой угодно функціей перемѣнной независимой x.

Такъ напримѣръ будетъ:

$$[\mathrm{Sin}\ (3x+5)]' = \mathrm{Cos}\ (3x+5) \cdot (3x+5)' =$$
$$= 3\ \mathrm{Cos}\ (3x+5) \cdot$$
$$[\mathrm{Sin}\ (nx+a)]' = n\ \mathrm{Cos}\ (nx+a).$$

Начинающіе особенно часто дѣлаютъ слѣдующую ошибку—пишутъ:

$$[\mathrm{Sin}\ (nx+a)]' = \mathrm{Cos}\ (nx+a)$$

забывая, что въ данномъ случаѣ аргументъ $nx+a$ есть функція отъ перемѣнной независимой x, и слѣдовательно выраженіе $\mathrm{Sin}\ (nx+a)$ есть функція отъ функціи, и производная ея будетъ:

$$[\mathrm{Sin}\ (nx+a)]' = \mathrm{Cos}\ (nx+a) \cdot (nx+a)' = n\ \mathrm{Cos}\ (nx+a).$$

Производная cos x.

2) Найдемъ теперь производную $\cos x$.

Замѣчая, что

$$\mathrm{Cos}\ x = \mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

видимъ, что стоитъ только въ предыдущей формулѣ положить

$$a = \frac{\pi}{2} \text{ и } n = -1$$

и мы получимъ:

$$(\mathrm{Cos}\ x)' = \left[\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = -\ \mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{2} - x\right] = -\ \mathrm{Sin}\ x.$$

Итакъ:

$$(\mathrm{Cos}\ x)' = -\ \mathrm{Sin}\ x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Задача. Вывести эту формулу непосредственно, подобно тому, какъ была выведена производная Sin x.

3) Пусть будетъ

Производная tg x.

$$y = \operatorname{tg} x$$

Чтобы найти y' стоитъ только замѣтить, что

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x}$$

и примѣнить формулу производной дроби, тогда получимъ:

$$y' = \frac{\operatorname{Cos} x\,(\operatorname{Sin} x)' - \operatorname{Sin} x\,(\operatorname{Cos} x)'}{\operatorname{Cos}^2 x} = \frac{\operatorname{Cos}^2 x + \operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Cos}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 x}$$

Итакъ

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Совершенно также получимъ:

Производная cotg x.

$$4) \quad (\operatorname{Cotg} x)' = \left(\frac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x}\right)' = \frac{\operatorname{Sin} x\,(\operatorname{Cos} x)' - \operatorname{Cos} x\,(\operatorname{Sin} x)'}{\operatorname{Sin}^2 x} =$$

$$= -\frac{\operatorname{Sin}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x}{\operatorname{Sin}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 x}.$$

Итакъ:

$$(\operatorname{Cotg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 x}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Задача. Вывести формулы (13) (14) непосредственно на основаніи опредѣленія производной.

Прежде чѣмъ находить производныя обратныхъ тригонометрическихъ функцій arc Sin x и arc tg x, сдѣлаемъ необходимыя относительно этихъ функцій условія.

Подъ выраженіемъ

$$y = \operatorname{arc\,sin} x$$

разумѣютъ, что y есть такой уголъ, выраженный *отвлеченнымъ* числомъ, синусъ котораго равенъ x. Но изъ тригонометріи извѣстно, что, если не указать «какой четверти» долженъ быть этотъ уголъ, то угловъ, имѣющихъ данный синусъ, безчисленное множество. Поэтому, чтобы не было такой не-

опредѣленности *подъ выраженіемъ* $y = \arcsin x$ *условимся разумѣть такой, выраженный отвлеченнымъ числомъ, уголъ* y, *синусъ котораго равенъ* x **и который заключается между**: $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$.

Такъ напр.:

$$y = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$y = \arcsin \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$y = \arcsin \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

и т. д.

Совершенно также *подъ выраженіемъ* $y = arc\ tg\ x$ *условимся разумѣть тотъ, выраженный отвлеченнымъ числомъ уголъ* y, *коего тангенсъ равенъ* x, *и который заключенъ между* $-\frac{\pi}{2}$ *и* $+\frac{\pi}{2}$,

поэтому будетъ, напр.:

$$\arctg (+1) = \frac{\pi}{4};\ \arctg (-1) = -\frac{\pi}{4},$$

Производная arc Sin x.

5) Найдемъ производную функціи

$$y = \arcsin x.$$

Изъ этого уравненія слѣдуетъ

$$\sin y = x.$$

Откуда имѣемъ, взявъ производныя:

$$\cos y \cdot y' = 1$$

значитъ

$$y' = \frac{1}{\cos y}$$

но такъ какъ $\sin y = x$, то

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2}$$

причемъ передъ корнемъ надо брать знакъ $+$, ибо по сдѣланному относительно функціи arc sin x условію, уголъ y заключается между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ и значитъ cos y — положительный.

Подставляя, имѣемъ:

$$y' = (\text{arc sin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Когда вмѣсто аргумента x будетъ взята какая нибудь функція отъ него u, и задано:

$$y = \text{arc sin } u$$

то по теоремѣ о производной функціи отъ функціи будетъ:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

Такъ напр., если

$$y = \text{arc sin}\left(\frac{x-a}{a}\right)$$

то будетъ

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-a}{a}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x-a}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2-(x-a)^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

6) Чтобы найти производную отъ

Производная arc tg x.

$$y = \text{arc tg } x$$

поступаемъ подобно предъидущему. Имѣемъ

$$\text{tg } y = x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

Откуда:

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = 1$$

слѣдовательно

$$y' = \cos^2 y.$$

Но въ силу уравненія (*) будетъ:

$$\sec^2 y = 1 + \text{tg}^2 y = 1 + x^2$$

а такъ какъ

$$\cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y}$$

то

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$

и значитъ

$$y' = (\text{arc tg } x)' = \frac{1}{1+x^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

По теоремѣ о производной функціи отъ функціи имѣемъ:

$$(\text{arc tg } u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

Такъ напримѣръ, если

$$y = \text{arc tg}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$$

то:

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2} \cdot \left(\frac{x-a}{x+a}\right)' =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2} \cdot \frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)^2} = \frac{a}{x^2+a^2}$$

Таблица производныхъ простѣйшихъ функцій.

§ 27. Сопоставляя все сказанное въ §§ 25 и 26 и помня теорему о производной функціи отъ функціи, мы можемъ написать слѣдующую таблицу производныхъ простѣйшихъ функцій, которую надлежитъ знать наизусть.

Въ этой таблицѣ перемѣнная независимая обозначена черезъ x, ея функціи черезъ y, z, u, v, w, ... , постоянные множители черезъ a, b, . . . n. Черезъ e обозначено число опредѣляемое рядомъ:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots = 2{,}718281828\ldots$$

Знакъ $\log N$ означаетъ Неперовъ логариомъ числа N т. е. при основаніи равномъ e.

Таблица производныхъ простѣйшихъ функцій.

1)	$(ax+b)' = a$	$(au+b)' = au'$
2)	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
3)	$(\log x)' = \frac{1}{x}$	$(\log u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
4)	$(a^x)' = a^x \cdot \log a$	$(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \log a$
5)	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
6)	$(\mathrm{Sin}\, x)' = \cos x$	$(\mathrm{Sin}\, u)' = \cos u \cdot u'$
7)	$(\cos x)' = -\mathrm{Sin}\, x$	$(\cos u)' = -\mathrm{Sin}\, u \cdot u'$
8)	$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\mathrm{Cos}^2 x}$	$(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\mathrm{Cos}^2 u} \cdot u'$
9)	$(\mathrm{Cotg}\, x)' = -\frac{1}{\mathrm{Sin}^2 x}$	$(\mathrm{Cotg}\, u)' = -\frac{1}{\mathrm{Sin}^2 u} \cdot u'$
10)	$(\mathrm{arc\,sin}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\mathrm{arc\,sin}\, u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11)	$(\mathrm{arc\,tg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arc\,tg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$

Кромѣ формулъ этой таблицы необходимо еще знать выраженія производныхъ алгебраической суммы, произведенія и дроби, а именно:

I) $(z-u+v-w)' = z'-u'+v'-w'$

II) $(u \cdot v)' = u'v + v'u$

$(uvw)' = u'vw + v'uw + w'uv$

. . . . . .

и т. д.

III) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$.

Замѣтимъ по поводу приведенной таблицы, что изъ сопоставленія формулъ 1 и I слѣдуетъ, что *производная всякаго постояннаго числа есть нуль.*

Изъ формулы

$$(au+b)' = au'$$

слѣдуетъ такая

$$(au)' = au'$$

иначе

$$[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$$

что выражаютъ такъ — *постоянный множитель можно выносить за знакъ производной.*

Примѣры нахожденія производныхъ.

§ 28. Приведенная таблица производныхъ простѣйшихъ функцій и теорема о производной функціи отъ функціи даютъ возможность находить производныя любой функціи, составленной изъ этихъ простѣйшихъ. Чтобы это выполнить, надлежитъ разсуждать слѣдующимъ образомъ:

Пусть, напримѣръ, дано

$$y = \log \operatorname{tg}(2x + 3)$$

и надо найти y'.

Такъ какъ послѣднее дѣйствіе, разысканіе логариѳма, производится не надъ перемѣнною независимою, то y есть функція отъ функціи. Обозначивъ черезъ u тотъ аргументъ, надъ которымъ производится послѣднее дѣйствіе, имѣемъ:

$$y = \log u$$
$$u = \operatorname{tg}(2x + 3)$$

Въ свою очередь, u есть также функція отъ функціи, ибо аргументомъ для послѣдняго дѣйствія при разысканіи u служитъ не x, а его функція $2x + 3$; такъ что, положивъ $v = 2x + 3$, имѣемъ

$$u = \operatorname{tg} v.$$

И такъ мы имѣемъ слѣдующій рядъ равенствъ:

$$\left.\begin{aligned} y &= \log u \\ u &= \operatorname{tg} v \\ v &= 2x + 3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Беря производныя ихъ, получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{1}{u} \cdot u' \\ u' &= \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 v} \cdot v' \\ v' &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Изъ уравненій (2) слѣдуетъ, замѣняя послѣдовательно v' и u' ихъ величинами:

$$u' = 2\frac{1}{\mathrm{Cos}^2 v}$$

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\mathrm{Cos}^2 v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

и подставляя сюда вмѣсто u и v ихъ значенія, получимъ

$$y' = \frac{2}{\mathrm{tg}\,(2x+3) \cdot \mathrm{Cos}^2\,(2x+3)}$$

такимъ образомъ, y' найдено; но слѣдуетъ всегда найденное выраженіе y' представлять въ возможно простомъ видѣ, дѣлая надлежащія преобразованія и сокращенія.

Такъ въ нашемъ случаѣ, знаменатель можно написать въ такомъ видѣ

$$\mathrm{tg}\,(2x+3) \cdot \cos^2\,(2x+3) = \frac{\mathrm{Sin}\,(2x+3)}{\mathrm{Cos}\,(2x+3)} \cdot \cos^2\,(2x+3)$$
$$= \mathrm{Sin}\,(2x+3) \cdot \mathrm{Cos}\,(2x+3)$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,(4x+6)$$

слѣдовательно будетъ:

$$y' = \frac{4}{\mathrm{Sin}\,(4x+6)}.$$

Замѣтимъ, что для того чтобы изъ уравненій (2) получить нужное намъ уравненіе (3), нѣтъ надобности дѣлать исключеніе послѣдовательно, стоитъ только перемножить равенства (2) и сократить общіе множители $u' \cdot v'$, и прямо получится

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\mathrm{Cos}^2 v}$$

Наконецъ нѣтъ надобности писать и самихъ равенствъ (2) и (3) а только воображать ихъ, и производить дѣйствія въ такой послѣдовательности:

$$y' = [\log \mathrm{tg}\,(2x+3)]' = \frac{1}{\mathrm{tg}\,(2x+3)} \cdot [\mathrm{tg}\,(2x+3)]' =$$
$$= \frac{1}{\mathrm{tg}\,(2x+3)} \cdot \frac{1}{\cos^2\,(2x+3)} \cdot (2x+3)'$$
$$= \frac{1}{\mathrm{tg}\,(2x+3)} \cdot \frac{1}{\cos^2\,(2x+3)} \cdot 2$$

Ясно, что для сокращенія можно не выписывать промежуточныхъ дѣйствій, а прямо писать:

$$y' = [\log \operatorname{tg}(2x+3)]' = \frac{1}{\operatorname{tg}(2x+3)} \cdot \frac{1}{\cos^2(2x+3)} \cdot 2$$

и получивъ выраженіе производной, упрощать его.

Практически всегда такъ и надо поступать, избѣгая напраснаго выписыванія лишнихъ формулъ.

Дадимъ для образца рядъ примѣровъ разысканія производныхъ.

Пусть

$$y = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

Имѣемъ

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

2) $$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3) $$y = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\operatorname{Cos}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2 \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) \cdot \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \frac{1}{\operatorname{Cos} x}$$

4) $$y = \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = \frac{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) - (\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})^2}$$

$$= \frac{-x\left[(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})^2+(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})^2\right]}{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})^2\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{-4x}{\left[(1+x^2)+(1-x^2)-2\sqrt{1-x^4}\right]\cdot\sqrt{1-x^4}}$$

$$= \frac{-2x}{(1-\sqrt{1-x^4})\sqrt{1-x^4}} = -\frac{2x(1+\sqrt{1-x^4})}{x^4\cdot\sqrt{1-x^4}}$$

$$= -\frac{2}{x^3}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\right)$$

Нѣкоторыя функціи, хотя и составленныя изъ простѣйшихъ не подходятъ непосредственно подъ тѣ образцы, которые показаны въ таблицѣ производныхъ простѣйшихъ функцій. Ниже будетъ дано общее правило для нахожденія производныхъ такихъ функцій, здѣсь-же мы ограничимся двумя простѣйшими примѣрами.

Пусть будетъ:

$$y = x^x$$

очевидно, что взявъ логариѳмы обѣихъ частей имѣемъ:

$$\log y = x \log x$$

Отсюда взявъ производную получимъ:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \log x + x\cdot\frac{1}{x} = 1+\log x$$

слѣдовательно

$$y' = y(1+\log x) = x^x(1+\log x)$$

Совершенно также, если бы было дано

$$y = u^v$$

гдѣ u и v двѣ заданныя функціи отъ x, то получили-бы:

$$\log y = v \cdot \log u$$

Откуда:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \log u + \frac{u'}{u} \cdot v$$

и слѣдовательно:

$$y' = y\left[v' \log u + \frac{u'}{u} \cdot v\right] =$$

$$= u^v \left[v' \log u + \frac{u' v}{u}\right].$$

Дифференціалъ функціи.

§ 29. Въ § 20 было показано слѣдующее общее соотношеніе между приращеніемъ функціи и безконечно малымъ приращеніемъ перемѣнной независимой:

$$\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x,$$

гдѣ ε есть безконечно малая величина одновременно съ Δx.

Такимъ образомъ безконечно малое приращеніе функціи состоитъ вообще изъ двухъ частей: 1) *главной:* $f'(x) \cdot \Delta x$, которая по отношенію къ приращенію перемѣнной независимой *перваго* порядка (если только при разсматриваемомъ частномъ значеніи перемѣнной x производная $f'(x)$ не равна нулю) и 2) *второстепенной:* $\varepsilon \cdot \Delta x$, заключающей неопредѣленный безконечно-малый множитель ε, слѣдовательно представляющей безконечно малую величину порядка *выше* перваго относительно Δx.

Въ § 14 были доказаны двѣ основныя теоремы о безконечно малыхъ величинахъ, а именно: о замѣнѣ однихъ безконечно малыхъ другими при разысканіи предѣла отношенія и предѣла суммы.

Въ этихъ теоремахъ доказано, что при разысканіи упомянутыхъ предѣловъ можно, *не измѣняя* предѣла, отбрасывать всѣ члены высшихъ порядковъ, удерживая лишь члены низшаго порядка.

Такимъ образомъ во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда безконечно малое приращеніе какой-либо функціи войдетъ въ составъ дроби, предѣлъ которой ищется, то отъ полнаго его выраженія

$$\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$$

можетъ быть удерживаема лишь главная часть

$$f'(x) \cdot \Delta x.$$

Точно также, когда такое полное приращеніе войдетъ въ составъ суммы изъ безчисленнаго множества безконечно малыхъ слагаемыхъ, то въ каждомъ изъ этихъ слагаемыхъ, *не измѣняя* предѣла суммы, можно вмѣсто полнаго приращенія функціи

$$\Delta f(x) \doteq f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$$

брать лишь главную часть его

$$f'(x) \cdot \Delta x.$$

Выше показано, какъ находится производная любой функціи, значитъ всегда найдется и главная часть ея полнаго приращенія, стоитъ только производную умножить на безконечно малое приращеніе перемѣнной независимой.

Эту главную часть полнаго безконечнаго малаго приращенія функціи называютъ ея *дифференціаломъ;* безконечно-же малое приращеніе перемѣнной независимой называютъ *дифференціаломъ* этой перемѣнной.

Что касается полнаго выраженія безконечно малаго приращенія функціи (мы составимъ такое выраженіе впослѣдствіи), то обыкновенно оно весьма сложно, причемъ сложность эта происходитъ какъ разъ отъ членовъ порядка выше перваго относительно Δx.

Такимъ образомъ введеніе понятія о дифференціалѣ, какъ главной части полнаго приращенія функціи, избавляетъ отъ необходимости вычислять именно это-то сложное выраженіе членовъ высшихъ порядковъ, и знать *впередъ*, не вычисляя ихъ, что они могутъ быть отброшены безъ вліянія на окончательный результатъ. Достигаемое этимъ упрощеніе вычисленій и дало возможность получить общіе и простые пріемы рѣшеній множества вопросовъ, иными способами совершенно неразрѣшимыхъ.

Достаточно упомянуть, что въ числѣ этихъ вопросовъ, находятся и вопросы объ опредѣленіи движенія тѣла подъ дѣйствіемъ заданныхъ силъ, чтобы стало понятнымъ, почему открытое Ньютономъ и Лейбницемъ въ концѣ XVII вѣка исчисленіе безконечно малыхъ способствовало дальнѣйшему быстрому развитію всѣхъ естественныхъ наукъ, которое затѣмъ привело и къ техническимъ ихъ приложеніямъ.

И такъ, имѣемъ слѣдующія опредѣленія:

1) *Дифференціаломъ перемѣнной независимой называется безконечно малое ея приращеніе.*

2) *Дифференціаломъ функціи называется произведеніе производной этой функціи на дифференціалъ перемѣнной независимой.*

Для обозначенія дифференціала принято передъ знакомъ функціи или перемѣнной ставить букву d.

Такимъ образомъ дифференціалъ перемѣнной x обозначаютъ знакомъ dx; дифференціалъ перемѣнной y, знакомъ dy; дифференціалъ функціи $f(x)$ знакоположеніемъ $df(x)$ и т. д.

Въ силу высказанныхъ опредѣленій, имѣемъ слѣдующія равенства:

$$df(x) = f'(x) \cdot dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$dy = y' \cdot dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

причемъ предполагается, что y есть функція отъ x.

Изъ равенства (1′) слѣдуетъ:

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Наконецъ изъ равенства:

$$\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \Delta x$$

такъ какъ, по опредѣленію

$$\Delta x = dx$$

слѣдуетъ:

$$\Delta f(x) = f'(x) \cdot dx + \varepsilon\, dx$$

а такъ какъ

$$f'(x) \cdot dx = df(x)$$

то будетъ:

$$\Delta f(x) = df(x) + \varepsilon\, dx$$

т. е. *что безконечно малое приращеніе функціи отличается отъ ея дифференціала на безконечно-малыя величины высшихъ порядковъ.*

Подъ величиною dx или Δx слѣдуетъ разумѣть любую безконечно-малую величину, какъ зависящую, такъ и не зависящую отъ перемѣнной x.

Таблица дифференціаловъ простѣйшихъ функцій.

§ 30. Пусть будетъ

$$u = f(x)$$

и

$$y = F(u) = F[f(x)]$$

такъ что y есть функція отъ функціи, x-же есть перемѣнная независимая.

По теоремѣ о производной функціи отъ функціи мы имѣли формулу:

$$y' = F'(u) \cdot u'.$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на dx, получимъ равенство:

$$y'\,dx = F'(u)\cdot u'\,dx$$

по опредѣленію дифференціала функціи имѣемъ:

$$y'dx = dy$$

$$u'dx = du$$

слѣдовательно

$$dy = F'(u)\cdot du.$$

Эта формула показываетъ, *что дифференціалъ функціи отъ функціи находится совершенно также, какъ если-бы аргументомъ служила сама перемѣнная независимая.*

На основаніи этой теоремы, пользуясь таблицей производныхъ простѣйшихъ функцій, можно составить слѣдующую таблицу дифференціаловъ простѣйшихъ функцій.

Таблица дифференціаловъ простѣйшихъ функцій.

1) $d\,(au+b) = a\,du$

2) $d\,(u^n) = nu^{n-1}\cdot du$

3) $d\log u = \frac{1}{u}\cdot du$

4) $d\,a^u = a^u\cdot\log a\cdot du$

5) $d\,e^u = e^u\cdot du$

6) $d\,\mathrm{Sin}\,u = \mathrm{Cos}\,u\cdot du$

7) $d\,\mathrm{Cos}\,u = -\mathrm{Sin}\,u\cdot du$

8) $d\,\mathrm{tg}\,u = \frac{1}{\mathrm{Cos}^2 u}\cdot du$

9) $d\,\mathrm{Cotg}\,u = -\frac{1}{\mathrm{Sin}^2 u}\cdot du$

10) $d\,\mathrm{arc\,Sin}\,u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot du$

11) $d \operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{1+u^2} \cdot du$

12) $d(z - u + v - w) = dz - du + dv - dw$

13) $d(uv) = v\,du + u\,dv$

14) $d(u\,v\,w) = v\,w\,du + u\,w\,dv + u\,v\,dw$

15) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$.

Замѣтимъ по поводу этой таблицы, 1) что изъ сопоставленія фф. (1) и (12) слѣдуетъ, *что дифференціалъ всякой постоянной равенъ нулю.*

2) Изъ той-же формулы (1) слѣдуетъ такая:

$$d(au) = a \cdot du,$$

которую выражаютъ обыкновенно такъ: *всякій постоянный множитель можно выносить изъ-подъ знака дифференціала.*

Правила дифференцированія функцій.

§ 31. Нахожденіе дифференціала функіи называется *дифференцированіемъ* ея.

Чтобы продифференцировать функцію стоитъ только послѣдовательно примѣнять формулы предыдущей таблицы, всякій разъ къ той функціи, знакъ которой непосредственно слѣдуетъ за знакомъ дифференціала, до тѣхъ поръ, пока подъ знакомъ дифференціала не будетъ содержаться никакихъ другихъ функцій или выраженій, кромѣ самой перемѣнной независимой; такимъ образомъ, если эта перемѣнная есть x, то дифференцированіе продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока послѣднимъ множителемъ не станетъ dx.

Послѣ этого надо выраженіе, стоящее множителемъ передъ dx, и представляющее собою производную данной функціи, привести къ простѣйшему виду.

Такъ напримѣръ, если

$$y = \log \operatorname{tg}(2x + 3),$$

то будетъ:

$$dy = \frac{1}{\operatorname{tg} 2x+3} \cdot d \operatorname{tg} (2x+3)$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg} (2x+3)} \cdot \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 (2x+3)} \cdot d(2x+3)$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg} (2x+3)} \cdot \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 (2x+3)} \cdot 2 \cdot dx$$

$$= \frac{4}{\operatorname{Sin} (4x+6)} \cdot dx. \text{ (См. § 28).}$$

Совершенно также, какъ и при нахожденіи производныхъ, нѣтъ надобности выписывать промежуточныхъ формулъ, а прямо писать такъ:

$$dy = \frac{1}{\operatorname{tg} (2x+3)} \cdot \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 (2x+3)} \cdot 2 \cdot dx$$

и затѣмъ упрощать полученное выраженіе.

Ясно, что, когда найденъ дифференціалъ какой-либо функціи, то сейчасъ-же найдется и ея производная, раздѣливъ дифференціалъ функціи на дифференціалъ перемѣнной независимой; а такъ какъ дифференціалъ всякой функціи находится совершенно также, какъ будто-бы ея аргументомъ была перемѣнная независимая, то часто для нахожденія производной находятъ сперва дифференціалъ функціи.

Въ дифференцированіи учащійся долженъ пріобрѣсти навыкъ и производить его быстро и безошибочно, для чего рекомендуется продѣлать помѣщенныя въ концѣ этой главы задачи и примѣры, приводя непремѣнно полученный результатъ къ простѣйшему виду, показанному въ отвѣтахъ.

Геометрическое значеніе дифференціала.

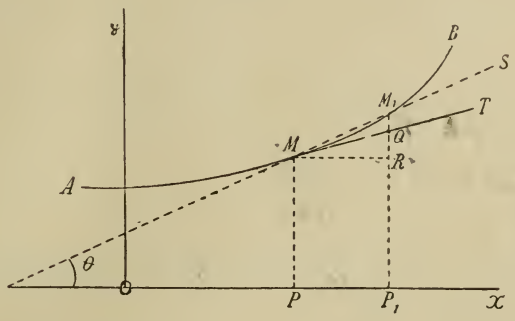
§ 32. Въ § 20 уже было указано значеніе производной какъ мѣры быстроты возрастанія функціи и показано геометрическое ея значеніе — тангенсъ угла уклона составляемаго касательной съ осью x-овъ. Покажемъ теперь геометрическое значеніе дифференціала (черт. 8).

Пусть уравненіе кривой AB есть

$$y = f(x)$$

Возьмемъ на этой кривой какую нибудь точку M, абсцисса которой $OP = x$, тогда ордината $PM = f(x)$.

Черт. 8.



Дадимъ перемѣнной какое-нибудь приращеніе $\Delta x = PP_1$, такъ что

$$OP_1 = x + \Delta x = x + dx.$$

Соотвѣтствующая ордината

$$P_1 M_1 = f(x + \Delta x) = y + \Delta y$$

слѣдовательно

$$RM_1 = P_1 M_1 - P_1 R = P_1 M_1 - PM = \Delta y.$$

Изъ треугольника $M_1 MR$ имѣемъ

$$\operatorname{tg} M_1 MR = \frac{RM_1}{MR} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Въ предѣлѣ когда точка M_1 неопредѣленно преближается къ M, сѣкущая MS обращается въ касательную MT и будетъ

$$\text{пред. } \frac{\Delta x}{\Delta y} = y' = \operatorname{tg} TMR = \operatorname{tg} \theta$$

Изъ треугольника RMQ имѣемъ

$$RQ = MR \cdot \operatorname{tg} \theta$$

но такъ какъ

$$MR = \Delta x = dx$$

и

$$\operatorname{tg} \theta = y'$$

то

$$RQ = y'\, dx$$

т. е. согласно опредѣленію дифференціала

$$RQ = dy.$$

Величина-же RM_1, какъ мы видѣли, представляетъ собою приращеніе y т. е. Δy.

Разность $RM_1 - RQ = \Delta y - dy = QM_1$ какъ было показано, есть безконечно-малая величина порядка *выше перваго* (вообще она оказывается второго порядка) по отношенію къ dx.

Собраніе примѣровъ на дифференцированіе явныхъ функцій съ одной перемѣнной независимой.

Изложенныя въ этой главѣ правила даютъ возможность находить производныя любой *явной* функціи одной перемѣнной независимой.

Для упражненія въ примѣненіи этихъ правилъ прилагается собраніе примѣровъ, заимствуемыхъ нами изъ курса лекцій читанныхъ въ 1887 г. въ С.-Петербургскомъ Университетѣ проф. К. А. Поссе.

1. $y = c\sqrt{x}\,;\ \frac{dy}{dx} = \frac{c}{2\sqrt{x}}.$

2. $y = \frac{a-x}{x}\,;\ \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x^2}.$

3. $y = \frac{1+x}{1+x^2}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}$.

4. $y = (1+2x-4x^2)\cdot(1-2x+4x^2-4x^3)$;

$\frac{dy}{dx} = 4x\,(20x^3-24x^2+9x-2)$.

5. $y = (\mathrm{Sin}\ x)^m$; $\frac{dy}{dx} = m\,\mathrm{Sin}^{m-1}\,x\,\mathrm{Cos}\,x$.

6. $y = \mathrm{Sin}\,(x^m)$; $\frac{dy}{dx} = m\,\mathrm{Cos}\,(x^m)\cdot x^{m-1}$.

7. $y = x\log x$; $\frac{dy}{dx} = 1+\log x$.

8. $y = \log \mathrm{Cotang}\ x$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\mathrm{Sin}\ 2x}$.

9. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$.

10. $y = \frac{x^3}{(1-x^2)^{3/2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{(1-x^2)^{5/2}}$.

11. $y = e^x\,(1-x^3)$; $\frac{dy}{dx} = e^x\,(1-3x^2-x^3)$.

12. $y = (x-3)e^{2x} - 4xe^x + x + 3$;

$\frac{dy}{dx} = (2x-5)\,e^{2x} + 4\,(x+1)\,e^x + 1$.

13. $y = \frac{1+3x-3x^2}{3x^3-9x^2+9x-3}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-2}{(x-1)^4}$.

14. $y = \frac{x}{(a^2-x^2)^{1/2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$.

15. $y = (9a^2-6abx+5b^2x^2)\cdot(a+bx)^{2/3}$;

$\frac{dy}{dx} = \frac{40}{3}\,b^3\,x^2\,(a+bx)^{-1/3}$.

16. $y = (5b^3x^3 + 30ab^2x^2 + 40a^2bx + 16a^3)\sqrt{a+bx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}\, b^4 x^3 (a+bx)^{-1/2}.$$

17. $y = \dfrac{[(x+1)\cdot(x+3)^9]^{1/2}}{(x+2)^4}$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{(x+2)^5}\left[\dfrac{(x+3)^7}{x+1}\right]^{1/2}$.

18. $y = \log\left[\dfrac{(1+x)^{1/2}+(1-x)^{1/2}}{(1+x)^{1/2}-(1-x)^{1/2}}\right]$; $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x(1-x^2)^{1/2}}$.

19. $y = \log(\log x)$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x \log x}$.

20. $y = e^{\text{arc Sin } x}$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(1-x^2)^{1/2}}\, e^{\text{arc Sin } x}$.

21. $y = \text{arc tang}\dfrac{x}{(1-x^2)^{1/2}}$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(1-x^2)^{1/2}}$.

22. $y = \dfrac{1}{(a^2-b^2)^{1/2}}\,\text{arc Cos}\dfrac{b+a\,\text{Cos}\,x}{a+b\,\text{Cos}\,x}$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{a+b\,\text{Cos}\,x}$.

23. $y = \log \text{tang}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\text{Cos}\,x}$.

24. $y = \text{arc tang}\left[\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{1/2}\text{tang}\dfrac{x}{2}\right]$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(a^2-b^2)^{1/2}}{a+b\,\text{Cos}\,x}$.

25. $y = x^{\text{Sin } x}$, $\dfrac{dy}{dx} = x^{\text{Sin } x}\left(\text{Cos}\,x\,\log x + \dfrac{\text{Sin}\,x}{x}\right)$.

26. $y = \log[x+(x^2-a^2)^{1/2}] + \text{arc Sec}\dfrac{x}{a}$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x+a}{x+a}\right)^{1/2}$.

27. $y = \left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}$; $\dfrac{dy}{dx} = n\left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}\left(1+\log\dfrac{x}{n}\right)$.

28. $y = \dfrac{x^n}{(1+x)^n}$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{nx^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}$.

29. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$.

30. $y = x^2(a+x)^3 \cdot (b-x)^4$; $\frac{dy}{dx} =$

$= [2ab - (6a - 5b)x - 9x^2]\, x(a+x)^2 \cdot (b-x)^3.$

31. $y = (a+x)^m (b+x)^n$; $\frac{dy}{dx} =$

$= (a+x)^{m-1} (b+x)^{n-1} [m(b+x)+n(a+x)].$

32. $y = \frac{1}{(a+x)^m (b+x)^n}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{m(b+x)+n(a+x)}{(a+x)^{m+1}(b+x)^{n+1}}$.

33. $y = \frac{\text{tang}^3 x}{3} - \text{tang}\, x + x$; $\frac{dy}{dx} = \text{tang}^4 x.$

34. $y = \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\,[1+2x\sqrt{1-x^2}]}$.

35. $y = (a^2+x^2)\,\text{arc tang}\,\frac{x}{a}$; $\frac{dy}{dx} = 2x\,\text{arc tang}\,\frac{x}{a} + a.$

36. $y = \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2x^2} \cdot \frac{bx+2c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

37. $y = \log[\log(a+bx^n)]$; $\frac{dy}{dx} = \frac{nbx^{n-1}}{(a+bx^n)\log(a+bx^n)}$.

38. $y = e^{(a+x)^2}\,\text{Sin}\,x$; $\frac{dy}{dx} = e^{(a+x)^2}\,[2(a+x)\,\text{Sin}\,x + \text{Cos}\,x.$

39. $y = \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{2\sqrt{x}\sqrt{a+x}(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}$.

40. $y = \log(x+\sqrt{1+x^2})$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

41. $y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$.

42. $y = \log(1+x^2)$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+x^2}$.

43. $y = \log \frac{x^2 - 2}{\sqrt{(6 - 2x^2)^3}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{(x^2 - 2)(3 - x^2)}$.

44. $y = \log \sqrt{\frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2} - x}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

45. $y = \log \sqrt{\frac{\sqrt{3} - x\sqrt{7}}{\sqrt{3} + x\sqrt{7}}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{21}}{7x^2 - 3}$.

46. $y = \frac{\frac{1}{x} + \frac{125}{12} + \frac{65}{3}x + \frac{35}{2}x^2 + 5x^3}{(1+x)^4} + 5 \log \frac{x}{1 + x}$;

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2(1 + x)^5}$.

47. $y = \frac{x^2(x^3 - 4)}{\sqrt[3]{(\log 2x)^2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{x(5x^3 - 8)\log 2x - \frac{2}{3}x(x^3 - 4)}{\sqrt[3]{(\log 2x)^5}}$

48. $y = e^x x^n$; $\frac{dy}{dx} = e^x(nx^{n-1} + x^n)$.

49. $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$; $\frac{dy}{dx} = x^3 \cdot e^x$

50. $y = x^x$; $\frac{dy}{dx} = x^x(1 + \log x)$.

51. $y = \log[(3x - 7x^3)^{5x-2}]$; $\frac{dy}{dx} = \frac{(5x - 2)\cdot(3 - 21x^2)}{3x - 7x^3} +$

$+ 5 \log(3x - 7x^3)$.

52. $y = (4x - 3)\log\left[\frac{3}{x} + 4x + \log\left(\frac{4x - 3}{x^2 + x}\right)\right]$;

$\frac{dy}{dx} = 4 \log\left[\frac{3}{x} + 4x + \log\left(\frac{4x - 3}{x^2 + x}\right)\right] +$

$+ \frac{16x^4 - 18x^2 + 9}{x(x + 1)\left[3 + 4x^2 + x \log\left(\frac{4x - 3}{x^2 + x}\right)\right]}$.

53. $y = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}\cdot(1 - x)}$.

54. $y = \sqrt{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^3}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x(2-x^2)}{(1-x^2)^{1/2}(1+x^2)^{5/2}}$.

55. $y = \frac{x}{e^x - 1}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x(1-x)-1}{(e^x-1)^2}$.

56. $y = e^x \frac{(x-2)e^x + x + 2}{(e^x-1)^3}$;

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^x}{(e^x-1)^4}[(x-3)e^{2x} + 4xe^x + x + 3].$$

57. $y = (x + \sqrt{1-x^2})^n$;

$$\frac{dy}{dx} = n(x+\sqrt{1-x^2})^{n-1}\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

58. $y = \left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^n$; $\frac{dy}{dx} = \frac{ny}{x\sqrt{1-x^2}}$.

59. $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^n$;

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^n \cdot \frac{1+n\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

60. $y = a^{(a^2-x^2)^{1/2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{(a^2-x^2)^{3/2}} \log a$.

61. $y = \operatorname{tang} a^{1/x}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{\operatorname{Sec}^2 a^{1/x}}{x^2} \log a \cdot a^{1/x}$.

62. $y = \log(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2})$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\right).$$

63. $y = (2a^{1/2} + x^{1/2})\sqrt{a^{1/2} + x^{1/2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{4a^{1/2} + 3x^{1/2}}{4\sqrt{x}\sqrt{a^{1/2}+x^{1/2}}}$.

64. $y = x + \log \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+\operatorname{tang} x}$.

65. $y = \dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$; $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{x^3}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}\right)$.

66. $y = x \operatorname{arc\,Sin} x$; $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{arc\,Sin} x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

67. $y = \operatorname{tang} x \cdot \operatorname{arc\,tang} x$; $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{Sec}^2 x \cdot \operatorname{arc\,tang} x + \dfrac{\operatorname{tang} x}{1+x^2}$.

68. $y = \operatorname{Sin} nx\,(\operatorname{Sin} x)^n$; $\dfrac{dy}{dx} = n\,(\operatorname{Sin} x)^{n-1} \cdot \operatorname{Sin}(n+1)\,x$.

69. $y = \dfrac{(\operatorname{Sin} nx)^m}{(\operatorname{Cos} mx)^n}$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{mn\,(\operatorname{Sin} nx)^{m-1} \cdot \operatorname{Cos}(mx-nx)}{(\operatorname{Cos} mx)^{n+1}}$.

70. $y = \log \dfrac{a+b\operatorname{tang}\frac{x}{2}}{a-b\operatorname{tang}\frac{x}{2}}$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ab}{a^2\operatorname{Cos}^2\frac{x}{2} - b^2\operatorname{Sin}^2\frac{x}{2}}$

71. $y = \dfrac{x - \operatorname{arc\,Sin} x}{(\operatorname{Sin} x)^3}$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Sin} x\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - 3\,(x - \operatorname{arc\,Sin} x)\operatorname{Cos} x}{(\operatorname{Sin} x)^4}.$$

72. $y = x^{4/x}$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^{4/x}(1-\log x)}{x^2}$.

73. $y = x^{\operatorname{arc\,Sin} x}$; $\dfrac{dy}{dx} = x^{\operatorname{arc\,Sin} x}\left(\dfrac{\operatorname{arc\,Sin} x}{x} + \dfrac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

74. $y = e^{e^x}$; $\dfrac{dy}{dx} = e^{e^x} \cdot e^x$.

75. $y = e^{x^x}$; $\dfrac{dy}{dx} = e^{x^x} \cdot x^x\,(1+\log x)$.

76. $y = x^{x^x}$; $\dfrac{dy}{dx} = x^{x^x} \cdot x^x \cdot \left(\dfrac{1}{x} + \log x + [\log x]^2\right)$.

77. $y = x^{e^x}$; $\dfrac{dy}{dx} = x^{e^x} \cdot e^x \dfrac{1+x\log x}{x}$.

78. $y = \operatorname{arc\,tang}\dfrac{2x}{1+x^2}$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\,(1-x^2)}{1+6x^2+x^4}$.

79. $y = \text{arc Sin}\,\frac{x-1}{\sqrt{2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

80. $y = \text{tang}\,\sqrt{1-x}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{-(\text{Sec}\,\sqrt{1-x})^2}{2\sqrt{1-x}}$.

81. $y = \text{arc tang}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

82. $y = \text{arc tang}\,(n\,\text{tang}\,x)$; $\frac{dy}{dx} = \frac{n}{\text{Cos}^2 x + n^2\,\text{Sin}^2 x}$.

83. $y = \text{arc Sec}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

84. $y = (x+a)\,\text{arc tang}\,\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax}$;

$\frac{dy}{dx} = \text{arc tang}\,\sqrt{\frac{x}{a}}$.

85. $y = \text{arc tang}\,\frac{x}{a} + \log\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{1/2}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2ax^2}{x^4-a^4}$.

86. $y = \text{arc Sin}\,\sqrt{\text{Sin}\,x}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\text{Cosec}\,x}$.

87. $y = \text{tang}\,x + \frac{1}{3}\,\text{tang}\,x^3$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{Cos}^4 x}$.

88. $y = \frac{4x\,\text{Sin}\,x - \text{Cos}\,x}{20\,\text{Cos}^3 x} + \frac{4x\,\text{Sin}\,x - 2\,\text{Cos}\,x}{15\,\text{Cos}^3 x} +$

$+ \frac{8}{15}(x\,\text{tang}\,x + \log\,\text{Cos}\,x)$; $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\text{Cos}^6 x}$.

89. $y = \log\left[1 - \left(1 - e^{\frac{a}{\text{Sin}\,x}}\right)^{1/2}\right]$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\,\text{Cos}\,x \cdot e^{-\frac{a}{\text{Sin}\,x}}}{2\,\text{Sin}^2 x\left(1-e^{-\frac{a}{\text{Sin}\,x}}\right)^{1/2}\left[1-\left(1-e^{-\frac{a}{\text{Sin}\,x}}\right)^{1/2}\right]}.$$

90. $y = \left[\frac{2}{\text{Cos}^4 x} + \frac{3}{\text{Cos}^2 x}\right]\text{Sin}\,x$; $\frac{dy}{dx} = \frac{8-3\,\text{Cos}^4 x}{\text{Cos}^5 x}$.

91. $y = \operatorname{tang} x - \operatorname{Cotang} x - 2x$; $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}^2 x + \operatorname{Cotang}^2 x$.

92. $y = \left(\operatorname{Cos}^2 x + \frac{2}{3}\right) \operatorname{Sin}^2 x$; $\frac{dy}{dx} = 5 \operatorname{Sin}^2 x \cdot \operatorname{Cos}^3 x$.

93. $y = -\frac{1}{2 \operatorname{Sin}^2 x} + \log \operatorname{tang} x$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{Sin}^3 x \cdot \operatorname{Cos} x}$.

94. $y = [\operatorname{tang}(p + qx)]^2$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2q \operatorname{tang}(p + qx)}{[\operatorname{Cos}(p + qx)]^2}$.

95. $y = x^2 \operatorname{Sec}(px + qx^3)$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + x^2 (p + 3qx^2) \cdot \operatorname{tang}(px + qx^3)}{\operatorname{Cos}(px + qx^3)}$.

96. $y = \frac{\operatorname{Sin} x}{a + b \operatorname{Cos} x}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{a \operatorname{Cos} x + b}{(a + b \operatorname{Cos} x)^2}$.

97. $y = \frac{\operatorname{Sin}^2 x}{a + b \operatorname{Cos}^2 x}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{(a + b) \operatorname{Sin} 2x}{(a + b \operatorname{Cos}^2 x)^2}$.

98. $y = \log \left| \frac{b + a \operatorname{Cos} x + \operatorname{Sin} x \sqrt{b^2 - a^2}}{a + b \operatorname{Cos} x} \right|$; $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a + b \operatorname{Cos} x}$.

99. $y = e^{ax} (a \operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x)$; $\frac{dy}{dx} = (a^2 + 1) e^{ax} \cdot \operatorname{Sin} x$.

100. $y = e^{ax} (a \operatorname{Cos} x + \operatorname{Sin} x)$; $\frac{dy}{dx} = (a^2 + 1) e^{ax} \cdot \operatorname{Cos} x$.

101. $y = ae^{ax} \cdot \operatorname{Sin} x (a \operatorname{Sin} x - 2 \operatorname{Cos} x) + 2e^{ax}$;
$\frac{dy}{dx} = a (a^2 + 4) e^{ax} \cdot \operatorname{Sin}^2 x$.

102. $y = e^{ax} \cdot \operatorname{Cos}^2 x [a \operatorname{Cos} x + 3 \operatorname{Sin} x] + \frac{6e^{ax} (a \operatorname{Cos} x + \operatorname{Sin} x)}{a^2 + 1}$;
$\frac{dy}{dx} = (a^2 + 9) e^{ax} \cdot \operatorname{Cos}^3 x$.

103. $y = e^{3x} (3 \operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x)$; $\frac{dy}{dx} = 10e^{3x} \cdot \operatorname{Sin} x$.

104. $y = \operatorname{arc}(\operatorname{Sin} \sqrt{x^3})$; $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3}{2} \sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^2}}$.

105. $y = \text{arc}\left(\text{Sin}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(1+x)^2\sqrt{2x(1-x)}}$.

106. $y = \text{arc}\,(\text{Sin}\,2x\sqrt{1-x^2})$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

107. $y = \text{arc}\left(\text{Sin}\,\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{1+x^2}$.

108. $y = x^3\,\text{arc}\left(\text{Sin}\,\frac{1}{x}\right)$; $\frac{dy}{dx} = x^2\left[3\,\text{arc}\,(\text{Sin}\,\frac{1}{x}) - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right]$.

109. $y = \text{arc}\left[\text{Sin}\,\frac{bx-a}{x\sqrt{b^2+a}}\right]$; $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a}}{x\sqrt{x^2+2bx+x}}$.

110. $y = \text{arc Sin}\sqrt{\frac{a+bx^2}{a+1+bx^2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{(a+1+bx^2)\sqrt{a+bx^2}}$.

111. $y = \text{arc tang}\,\frac{2x}{1-x^2}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$.

112. $y = \text{arc tang}\,\frac{x-2}{2\sqrt{x^2+x-1}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2+x-1}}$.

113. $y = \text{arc tang}\,\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\cdot(1+x^2)}$.

114. $y = \text{arc Sec}\,\frac{1+x^2}{1-x^2}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$

115. $y = \text{arc tang}\,\frac{2x+1}{x\sqrt{3}}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{3}}{7x^2+4x+1}$.

116. $y = \text{arc Sec}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

117. $y = \text{arc tang}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

118. $y = \text{arc Sec}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

119. $y = \text{arc tang}\,\dfrac{2x-1}{2\sqrt{1+x-x^2}}$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

120. $y = \text{arc Sec}\,\dfrac{x\sqrt{5}}{2\sqrt{x^2+x-1}}$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2+x-1}}$.

121. $y = \sqrt{1-x^2} - x\,\text{arc Sin}\,\sqrt{1-x^2}$;

$\dfrac{dy}{dx} = -\,\text{arc Sin}\,\sqrt{1-x^2}$.

122. $y = \left(1-\frac{1}{3}x^2\right)x\,\text{arc Sin}\,\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9}(7-x^2)\sqrt{1-x^2}$;

$\dfrac{dy}{dx} = (1-x)\cdot\,\text{arc Sin}\,\sqrt{1-x^2}$.

123. $y = \frac{1}{4}x^2 - \left[\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\,\text{arc Sin}\,x\right]\text{arc Sin}\,x$;

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\text{arc Sin}\,x$.

124. $y = \left[-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{9}{16}\,\text{arc Sin}\,x\Big]\,\text{arc Sin}\,x +$

$+\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{16}x^2$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,\text{arc Sin}\,x$.

125. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\text{arc Sin}\,x + \frac{1}{2}\log(1-x^2)$;

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\,\text{arc Sin}\,x$

126. $y = \frac{1}{2}\,\text{arc Sin}\,\sqrt{1-x^2} + \log\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

$\dfrac{dy}{dx} = -\,\frac{1}{x^2}\,\text{arc Sin}\,\sqrt{1-x^2}$.

127. $y = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\right)\text{arc Cos}\,x - \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$;

$\dfrac{dy}{dx} = x\,\text{arc Cos}\,x$.

128. $y = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - (1 - \frac{1}{2}x^2)\operatorname{arc\,tang}\sqrt{1-x^2}$:

$$\frac{dy}{dx} = x \operatorname{arc\,tang}\sqrt{1-x^2}.$$

129. $y = \frac{1}{5}x^5 \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{10}\log(1+x^2)$;

$$\frac{dy}{dx} = x^4 \operatorname{arc\,tang} x.$$

130. $y = (x - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang} x)\operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arc\,tang} x.$$

131. $y = \left[\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tang} x\right]\operatorname{arc\,tang} x + \frac{1}{4(1+x^2)}$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+x^2)}\operatorname{arc\,tang} x.$$

132. $y = r \cdot \operatorname{arc\,Sin\,vers}\frac{x}{r} + \sqrt{2rx - x^2}$; $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2r-x}{x}}$.

133. $y = -\frac{\operatorname{Sin} x}{2+\operatorname{Cos} x} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,Cos}\frac{1+2\operatorname{Cos} x}{2+\operatorname{Cos} x}$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{(2+\operatorname{Cos} x)^2}.$$

134. $y = \operatorname{arc}\left[\operatorname{tang}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}x\right]$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\operatorname{Cos} x}.$$

135. $y = \operatorname{arc\,Sin}\left(\frac{x^2}{a^2}\right)$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{a^4-x^4}}$.

136. $y = \operatorname{arc\,Sin}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-a^2)}}$.

137. $y = \operatorname{Sin}(\operatorname{Cos} x)$; $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{Cos}(\operatorname{Cos} x)\operatorname{Sin} x$.

138. $y = (a^2 - x^2)^2$; $\frac{dy}{dx} = -4x(a^2 - x^2)$.

139. $y = \sqrt{a + bx + cx^2}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{b + 2cx}{2\sqrt{a + bx + cx^2}}$.

140. $y = \sqrt[3]{a + \sqrt{bx + c}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6} \frac{b}{\sqrt{bx + c} \cdot \sqrt[3]{(a + \sqrt{bx + c})^2}}$.

141. $y = \text{arc tang } \frac{2x}{1 - x^2}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1 + x^2}$.

142. $y = \text{arc Sin } \frac{ax}{b + cx^2}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{a(b - cx^2)}{\sqrt{b^2 + (2bc + a^2)x^2 + c^2x^4(b + cx^2)}}$.

143. $y = \sqrt{1 - x^2} \text{ arc Sin } x - x$; $\frac{dy}{dx} = \frac{x \text{ arc Sin } x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

144. $y = \frac{x \text{ arc Sin } x}{\sqrt{1 - x^2}} + \log \sqrt{1 - x^2}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{\text{arc Sin } x}{(1 - x^2)^{3/2}}$.

145. $y = \text{arc tang } (x + \sqrt{1 - x^2})$; $\frac{dy}{dx} =$

$$= \frac{\sqrt{1 - x^2} - x}{2\sqrt{1 - x^2}\,(1 + x\sqrt{(1 - x^2)})}.$$

146. $y = \text{arc Sin } \frac{x \text{ tang } \alpha}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 \text{ tang } \alpha}{a^2 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 \text{ Sec}^2 \alpha}}$.

147. $y = \text{arc Sin } \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{b^2 - x^2}}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{x\sqrt{b^2 - a^2}}{(b^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

148. $y = \text{arc tang } \sqrt{\frac{1 - \text{Cos } x}{1 + \text{Cos } x}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$.

149. $y = \text{arc Sin } \frac{b + a \text{ Cos } x}{a + b \text{ Cos } x}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b \text{ Cos } x}$.

150. $y = \text{arc tang } \left[\frac{\sqrt{a^2 - b^2} \text{ Sin } x}{b + a \text{ Cos } x} \right]$; $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b \text{ Cos } x}$.

151. $y = \operatorname{arc\,Cos} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2nx^{n-1}}{x^{2n}+1}$.

152. $y = \operatorname{arc\,Sec} \frac{1}{2x^2-1}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

153. $y = \operatorname{arc\,Sin} \sqrt{\frac{x^2+a^2}{b^2-a^2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}$.

154. $y = \log \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{2}}{1+x^4}$.

155. Имѣя:

$$\operatorname{Sin} x + \operatorname{Sin} 2x + \cdots + \operatorname{Sin} nx = \frac{\operatorname{Sin} \frac{n+1}{2} x \operatorname{Sin} \frac{nx}{2}}{\operatorname{Sin} \frac{x}{2}},$$

доказать равенство:

$$\operatorname{Cos} x + 2 \operatorname{Cos} 2x + \cdots + n \operatorname{Cos} nx =$$
$$= \frac{\frac{n+1}{2} \operatorname{Sin} \frac{x}{2} \operatorname{Sin} \frac{2n+1}{2} x - \frac{1}{2} \left(\operatorname{Sin} \frac{n+1}{2} x \right)^2}{\operatorname{Sin}^2 \frac{x}{2}}.$$

156. Имѣя:

$$\operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} \left(x + \frac{\pi}{m} \right) \cdot \operatorname{Sin} \left(x + \frac{2\pi}{m} \right) \cdots \operatorname{Sin} \left(x + \frac{m-1}{m} \pi \right) =$$
$$= \frac{\operatorname{Sin} mx}{2^{m-1}},$$

доказать равенство:

$$\operatorname{Cosec}^2 x + \operatorname{Cosec}^2 \left(x + \frac{\pi}{m} \right) + \cdots + \operatorname{Cosec}^3 \left(x + \frac{m-1}{m} \pi \right)$$
$$= \frac{m^2 \operatorname{Cosec}^2 (mx)}{2^{m-1}}.$$

(Надо сперва прологариомировать данное выраженіе).

ГЛАВА III.

Дифференцированіе функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ.

Приращеніе функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ.

§ 33. Положимъ, что задана функція V перемѣнныхъ независимыхъ: $x,\ y,\ z\ \ldots\ t$

$$V = F(x,\ y,\ z,\ \ldots\ t)$$

и пусть этимъ перемѣннымъ приписаны соотвѣтственно частныя значенія:

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ g$$

тогда функція V принимаетъ частное значеніе:

$$F(a,\ b,\ c,\ \ldots\ g)$$

Всякое другое частное значеніе перемѣнной x можетъ быть представлено въ видѣ $a+h$, гдѣ h какое угодно положительное или отрицательное или даже мнимое число, точно также всякое другое частное значеніе перемѣнной y можетъ быть представлено въ видѣ $b+k$; перемѣнной z — въ видѣ $c+l$... перемѣнной t — въ видѣ $g+n$, причемъ $k,\ l,\ \ldots\ n$ подобно h суть какія угодно числа.

Совершенно также какъ и для одной перемѣнной независимой (§ 19) числа $h,\ k,\ l,\ \ldots\ n$ которыя надо придать къ первоначальнымъ значеніямъ перемѣнныхъ чтобы получить новыя ихъ значенія называются *приращеніями* значеній $a,\ b,\ c,\ \ldots\ g$ перемѣнныхъ $x,\ y,\ z,\ \ldots\ t$.

Вмѣсто слова «приращеніе» чтобы указывать къ какому значенію оно относится употребляютъ знакъ Δ, какъ показано въ § 19.

Такимъ образомъ будетъ:

$$h = \Delta a;\ k = \Delta b;\ \ldots\ n = \Delta g$$

Новое или приращенное значеніе функціи будетъ

$$F(a+h,\ b+k,\ \ldots\ g+n) = F(a+\Delta a,\ b+\Delta b\ \ldots\ g+\Delta g)$$

Разность приращеннаго значенія функціи и первоначальнаго называется приращеніемъ этого послѣдняго и обозначается знакомъ Δ поставленнымъ передъ знакомъ функціи.

Такимъ образомъ будетъ:

$$\Delta F(a,\ b,\ c,\ \ldots\ g) =$$
$$= F(a+\Delta a,\ b+\Delta b,\ \ldots\ g+\Delta g) - F(a,\ b,\ \ldots\ g).$$

Вообще для какихъ угодно значеній перемѣнныхъ независимыхъ будетъ:

$$\Delta F(x,\ y,\ z,\ \ldots\ t) =$$
$$= F(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ \ldots\ t+\Delta t) - F(x,\ y,\ z,\ \ldots\ t).$$

Это равенство и служитъ опредѣленіемъ приращенія функціи нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Непрерывность функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ.

§ 34. Функція $F(x,\ y,\ z,\ \ldots\ t)$ называется *непрерывною* въ сопредѣльности съ частными значеніями

$$x = a,\ y = b,\ z = c,\ \ldots\ t = g$$

перемѣнныхъ независимыхъ, когда приращеніе функціи, т. е. разность

$$F(a+h,\ b+k,\ \ldots\ g+n) - F(a,\ b,\ c,\ \ldots\ g)$$

остается безконечно малою при **произвольныхъ** положительныхъ или отрицательныхъ безконечно-малыхъ приращеніяхъ частныхъ значеній $a,\ b,\ c,\ \ldots\ g$ перемѣнныхъ независимыхъ.

Функція называется *непрерывною* для «данной области» опредѣляемой, напр., неравенствами:

$$A_1 \leqq x \leqq A_2$$
$$B_1 \leqq y \leqq B_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$G_1 \leqq t \leqq G_2$$

если она непрерывна въ сопредѣльности со всякой совокупностью частныхъ значеній перемѣнныхъ, лежащихъ въ данныхъ промежуткахъ, или какъ говорятъ въ «данной области».

Какъ видно, всѣ эти опредѣленія представляютъ собою нечто иное, какъ распространеніе опредѣленій § 19 относящихся къ одной перемѣнной независимой.

Повторяя указанное въ § 19 разсужденіе увидимъ, что если функція нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ *непрерывна* для какой-либо области, то для всякой совокупности значеній

$$a,\ b,\ \ldots\ldots\ g,$$

лежащихъ въ этой области, имѣетъ мѣсто равенство:

$$\text{пред. } F(x,\ y,\ \ldots\ldots\ t) = F(a,\ b,\ \ldots\ldots\ g) =$$
$$= F[\text{пред. } x,\ \text{пред. } y,\ \ldots\ldots\ \text{пред. } t]$$

Въ самомъ дѣлѣ по опредѣленію предѣла имѣемъ:

$$x = a + \alpha$$
$$y = b + \beta$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$t = g + \tau$$

причемъ $\alpha,\ \beta,\ \ldots\ldots\ \tau$ безконечно-малыя.

Въ силу же непрерывности будетъ:

$$F(a+\alpha,\ b+\beta,\ \ldots .\ g+\tau) - F(a,\ b,\ c,\ \ldots .\ g) = \delta$$

причемъ δ есть безконечно малая величина одновременно съ $\alpha,\ \beta,\ \ldots .\ \tau$. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\text{пред. } F(x, y, \ldots .\ t) = \text{пред. } F(a+\alpha,\ b+\beta,\ \ldots .\ g+\tau) = F(a,\ b,\ c,\ \ldots .\ g)$$

что и доказываетъ высказанную теорему.

Частныя производныя и частые дифференціалы.

§ 35. Для функцій отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ необходимо ввести еще слѣдующія понятія: 1) о частныхъ производныхъ и частныхъ дифференціалахъ и 2) о полномъ дифференціалѣ.

Пусть будетъ задана функція

$$V = f(x,\ y,\ z,\ \ldots .\ t)$$

перемѣнныхъ независимыхъ $x,\ y,\ z,\ \ldots\ t$.

Положимъ сперва, что перемѣнныя $y,\ z,\ \ldots\ t$ сохраняютъ какія-нибудь приписанныя имъ значенія, а измѣняется только x; это предположеніе равносильно тому, что $y,\ z,\ \ldots\ t$ разсматриваются какъ постоянныя, а только x какъ перемѣнное, значитъ V будетъ тогда функціей одной только перемѣнной x, и мы можемъ взять отъ этой функціи производную по правиламъ изложеннымъ во II главѣ.

Такая производная называется частною производною отъ V по перемѣнной x. Мы будемъ ее обозначать такъ:

$$V_x' = f_x'(x,\ y,\ z,\ \ldots .\ t)$$

Въ томъ-же предположеніи, что измѣняется одна только перемѣнная x, остальныя-же перемѣнныя сохраняютъ свои зна-

ченія, можетъ быть взятъ и дифференціалъ, который называютъ *частнымъ дифференціаломъ* отъ V по x и обозначаютъ такъ:

$$d_x\ V.$$

Мы имѣли для функціи одной перемѣнной

$$u = F(x)$$

слѣдующія соотношенія между производною и дифференціаломъ:

$$du = u'\ dx$$

и

$$u' = \frac{du}{dx}.$$

Слѣдовательно въ разсматриваемомъ случаѣ будемъ имѣть слѣдующія соотношенія между частною производною и частнымъ дифференціаломъ:

$$\left.\begin{aligned} d_x V &= V_x' \cdot dx \\ V_x' &= \frac{d_x V}{dx} \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ по опредѣленію производной будетъ:

$$V_x' = \text{пред.}\ \frac{f(x+\Delta x, y, z, \ldots t) - f(x, y, z, \ldots t)}{\Delta x}. \quad (2)$$

Совершенно также можно поступить по отношенію къ другимъ перемѣннымъ: y, z, . . . t, такъ что напр. частная производная V по y и ея частный дифференціалъ получатся, если въ функціи

$$V = f(x, y, z, \ldots t)$$

всѣ перемѣнныя кромѣ y разсматривать какъ постоянныя, y-же считать перемѣннымъ. Такимъ образомъ

$$V_y' = \text{пред.}\,\frac{f(x, y+\Delta y, z. \ldots t) - f(x. y, z. \ldots t)}{\Delta y}$$

и

$$d_y V = V_y' \cdot dy$$

будутъ представлять собою частную производную V по y и частный ея дифференціалъ, по этой-же перемѣнной.

Очевидно, что для функціи V можно получить столько-же частныхъ дифференціаловъ, сколько въ этой функціи перемѣнныхъ независимыхъ, и между каждою частною производною и соотвѣтствующимъ частнымъ дифференціаломъ будутъ имѣть мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$V_x' = \frac{d_x V}{dx};\quad V_y' = \frac{d_y V}{dy},\quad V_z' = \frac{d_z V}{dz} \ldots\ V_t' = \frac{d_t V}{dt}$$

эти дроби для сокращенія письма пишутъ такъ:

$$\frac{\partial V}{\partial x},\ \frac{\partial V}{\partial y},\ \frac{\partial V}{\partial z},\ \ldots\ \frac{\partial V}{\partial t}$$

и выговариваютъ: «частная производная V по x, частная производная V по y и т. д.».

Полный дифференціалъ.

§ 36. *Полнымъ дифференціаломъ функціи называютъ сумму частныхъ ея дифференціаловъ.*

Полный дифференціалъ функціи V обозначаютъ знакомъ Vd.

Такимъ образомъ имѣемъ уравненіе:

$$dV = d_x V + d_y V + d_z V + \ldots + d_t V$$

или

$$dV = V_x' dx + V_y' dy + V_z' dz + \ldots + V_t' dt$$

или

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz + \ldots + \frac{\partial V}{\partial t} \cdot dt$$

Примѣръ. Пусть

$$V = x^3 + 3x^2y - y^3 + xyz$$

тогда:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 3x^2 + 6xy + yz$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + xz$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = xy$$

и

$$dV = (3x^2 + 6xy + yz)\,dx + (3x^2 - 3y^2 + xz)\,dy + xydz$$

Изъ вышеизложеннаго видно, что нахожденіе частныхъ производныхъ, частныхъ дифференціаловъ, и полнаго дифференціала функцій отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ приводится къ нахожденію производныхъ и дифференціаловъ функцій *одной* перемѣнной независимой, что и можетъ быть выполняемо по правиламъ, изложеннымъ во II главѣ.

Полный дифференціалъ и полное приращеніе.

§ 37. Поясникъ теперь, какимъ образомъ явилось самое понятіе о частныхъ дифференціалахъ и о полномъ дифференціалѣ.

Мы видѣли, что для функцій одной перемѣнной независимой дифференціалъ функціи представляетъ собою главную часть безконечно-малаго ея приращенія, отличающуюся отъ полнаго приращенія функціи на безконечно-малыя величины высшихъ порядковъ.

Изъ опредѣленія частной производной и частнаго дифференціала сейчасъ-же слѣдуетъ, что подобное соотношеніе имѣетъ мѣсто между частнымъ дифференціаломъ функціи по какой-либо перемѣнной и частнымъ ея приращеніемъ по этой перемѣнной.

Въ самомъ дѣлѣ мы имѣли равенство:

$$f_x'(x, y, \ldots .t) = \text{пред.}\ \frac{f(x+\Delta x, y, \ldots . t) - f(x, y, \ldots . t)}{\Delta x}$$

изъ котораго слѣдуетъ, что:

$$\frac{f(x+\Delta x, y, \ldots . t) - f(x, y, \ldots . t)}{\Delta x} = f_x'(x, y, \ldots . t) + \varepsilon_1$$

гдѣ ε_1 есть безконечно-малая одновременно съ Δx, въ силу опредѣленія понятія о предѣлѣ (§ 9). Слѣдовательно:

$$f(x+\Delta x, y, \ldots . t) - f(x, y, \ldots . t) =$$
$$= f_x'(x, y, \ldots . t) \cdot \Delta x + \varepsilon_1 \cdot \Delta x.$$

Безконечно малое приращеніе перемѣнной независимой мы условились называть ея дифференціаломъ, значитъ

$$\Delta x = dx$$

по опредѣленію-же частнаго дифференціала произведеніе:

$$f_x'(x, y, \ldots . t) \cdot dx = d_x f(x, y, \ldots . t)$$

Такимъ образомъ имѣемъ равенство:

$$f(x+\Delta x, y, \ldots t) - f(x, y, \ldots t) = f_x'(x, y, \ldots t) \cdot \Delta x + \varepsilon_1 \cdot \Delta x =$$
$$= d_x f(x, y, \ldots t) + \varepsilon_1 \cdot dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Совершенно также будетъ:

$$f(x, y+\Delta y, z \ldots t) - f(x, y, \ldots t) = f_y'(x, y, \ldots t) \cdot \Delta y + \varepsilon_2 \cdot \Delta y$$
$$= d_y f(x, y, \ldots t) + \varepsilon_2 \cdot dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

и т. д. для любой перемѣнной.

Разсмотримъ теперь *полное* приращеніе функціи

$$V = f(x, y, z \ldots . t) .$$

имѣемъ:

$$\Delta V = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ \ldots\ t+\Delta t) - f(x,\ y,\ \ldots\ t)$$

Это полное приращеніе можетъ быть написано такъ

$$\Delta V =$$

$$= f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ \ldots\ t+\Delta t) - f(x,\ y+\Delta y,\ \ldots\ t+\Delta t)$$

$$+ f(x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z,\ \ldots\ t+\Delta t) - f(x,\ y,\ z+\Delta z,\ \ldots\ t+\Delta t)$$

$$+ f(x,\ y,\ z+\Delta z,\ \ldots\ t+\Delta t) - f(x,\ y,\ z,\ \ldots\ t+\Delta t)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ f(x,\ y,\ \ldots\ s,\ t+\Delta t) - f(x,\ y,\ z,\ \ldots\ t)$$

Обозначимъ на время

$y+\Delta y$ черезъ y_1

$z+\Delta z$ » z_1

. . . . . .

$t+\Delta t$ » t_1

тогда разность

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ \ldots\ t+\Delta t) - f(x,\ y+\Delta y,\ \ldots\ t+\Delta t)$$

напишется такъ:

$$f(x+\Delta x,\ y_1,\ \ldots\ t_1) - f(x,\ y_1\ \ldots\ t_1)$$

и въ силу равенства (1) будетъ:

$$f(x+\Delta x,\ y_1,\ \ldots\ t_1) - f(x,\ y_1,\ \ldots\ t_1) =$$

$$= f_x'(x,\ y_1,\ \ldots\ t_1)\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta x$$

причемъ ε_1 есть безконечно-малая величина одновременно съ Δx, каковы бы ни были значенія перемѣнныхъ $y_1, z_1, \ldots t_1$.

Стоящая въ правой части этого равенства функція $f_x'(x, y_1, z_1 \ldots t_1)$, по замѣнѣ $y_1, z_1 \ldots t_1$ ихъ величинами, какъ видно есть

$$f_x'(x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots t+\Delta t)$$

Если функція $f_x'(x, y, z, \ldots t)$ *непрерывна*, что мы и будемъ предполагать, то разность

$$f_x'(x, y+\Delta y, \ldots t+\Delta t) - f_x'(x, y, \ldots t)$$

безконечно-мала при всякихъ безконечно-малыхъ значеніяхъ $\Delta y, \Delta z, \ldots \Delta t$; обозначивъ эту разность черезъ α_1 имѣемъ:

$$f_x'(x, y+\Delta y, \ldots t+\Delta t) = f_x'(x, y, \ldots t)+\alpha_1$$

подставляя, получаемъ:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, \ldots t+\Delta t) - f(x, y+\Delta y, \ldots t+\Delta t) = f_x'(x, y, \ldots t)\cdot\Delta x+(\varepsilon_1+\alpha_1)\Delta x.$$

Совершенно также обозначая черезъ $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ величины безконечно-малыя одновременно съ $\Delta x, \Delta y, \ldots \Delta z$ и предполагая, что каждая изъ функцій:

$$f_y'(x, y, \ldots t);\ f_z'(x, y, \ldots t);\ \ldots\ f_t'(x, y, \ldots t)$$

непрерывна, получимъ:

$$f(x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots t+\Delta t) - f(x, y, z+\Delta z, \ldots t+\Delta t) = f_y'(x, y, \ldots t)\cdot\Delta y+(\varepsilon_2+\alpha_2)\Delta y$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(x, y, \ldots t+\Delta t) - f(x, y, \ldots t) = f_t'(x, y, \ldots t)\cdot\Delta t+(\varepsilon_k+\alpha_k)\Delta t$$

Подставляя эти величины въ выраженіе ΔV и обозначая черезъ β_1, β_2 . . . β_k суммы $\alpha_1+\varepsilon_1$, $\alpha_2+\varepsilon_2$ . . . $\alpha_k+\varepsilon_k$, получимъ:

$$\Delta V = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ \ldots\ t+\Delta t) - f(x,\ y,\ \ldots\ t) =$$
$$= f_x'(x, y, \ldots t)\cdot\Delta x + f_y'(x, y, \ldots t)\cdot\Delta y \ldots + f_z'(x, y, \ldots t)\cdot\Delta t +$$
$$+ \beta_1\Delta x + \beta_2\Delta y + \ldots + \beta_k\cdot\Delta t \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

причемъ β_1, β_2 . . . . β_k величины безконечно малыя одновременно съ Δx, Δy, . . . Δt.

Безконечно-малыя приращенія перемѣнныхъ независимыхъ, какъ мы уже видѣли, равны ихъ дифференціаламъ, т. е.

$$\Delta x = dx;\ \Delta y = dy;\ \ldots\ \Delta t = dt$$

слѣдовательно произведенія $f_x'(x, y, \ldots t)\cdot\Delta x = f_x'(x, y, \ldots t)\cdot dx$ и т. д. . . . $f_t'(x, y, \ldots t)\cdot\Delta t = f_t'(x, y, \ldots t)\cdot dt$ представляютъ собою не что иное, какъ частные дифференціалы функціи $f(x, y, \ldots t)$, сумма ихъ есть полный дифференціалъ этой функціи, т. е.

$$df(x, y, \ldots t) = dV.$$

Такимъ образомъ имѣемъ равенство:

$$\Delta V = dV + \beta_1\Delta x + \beta_2\Delta y + \ldots + \beta_k dt \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

которое и показываетъ, что *полное приращеніе функціи отличается отъ полнаго ея дифференціала на безконечно-малыя величины высшихъ порядковъ* и слѣдовательно *полный дифференціалъ функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ представляетъ собою главную часть полнаго безконечно-малаго ея приращенія.*

Обратимъ, однако, вниманіе на слѣдующее обстоятельство: для одной перемѣнной независимой при доказательствѣ этой теоремы достаточно было предположить *непрерывность самой функціи*, въ случаѣ-же нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ необходимо, чтобы *была непрерывною не только сама функція, но и частныя ея производныя по каждой изъ перемѣнныхъ.*

Дифференцированія сложныхъ функцій.

§ 38. Изъ формулы

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y\ \ldots\ t+\Delta t) - f(x,\ y,\ \ldots\ t) =$$
$$= f_x'(x,\ y,\ \ldots t)\cdot\Delta x + f_y'(x,\ y,\ \ldots t)\cdot\Delta y + \ldots + f_t'(x,\ y,\ \ldots t)\cdot\Delta t$$
$$+ \beta_1\Delta x + \beta_2\Delta y + \ldots + \beta_k\Delta t \quad \ldots \quad (*)$$

мы выведемъ общую формулу дифференцированія сложныхъ функцій.

Сложною *функціей называютъ такую, которая зависитъ какъ отъ перемѣнной независимой x, такъ и отъ другихъ перемѣнныхъ y, z, . . . t, которыя въ свою очередь суть функціи отъ x.*

Такъ напр.:

$$V = (2x+3)^{\mathrm{Sin}\,x}$$

есть сложная функція отъ x, ибо ее можно написать такъ

$$V = z^y$$

если положить

$$y = \mathrm{Sin}\ x$$

$$z = 2x+3.$$

Итакъ, пусть будетъ

$$V = f(x,\ y,\ \ldots\ t)$$

причемъ y, z, ... t суть въ свою очередь какія угодно заданныя функціи отъ x и требуется найти ея производную.

По опредѣленію производной, надо найти предѣлъ отношенія $\frac{\Delta V}{\Delta x}$.

Чтобы составить выраженіе ΔV, надо въ выраженіе V, подставить вмѣсто x величину $x+\Delta x$ и изъ полученнаго результата вычесть первоначальное значеніе V.

Но, когда вмѣсто x будетъ подставлено $x+\Delta x$, то и зависящія отъ перемѣнной x функціи y, z, . . . t получатъ соотвѣтствующія приращенія и обратятся:

$$\begin{aligned} y &\quad \text{въ} \ldots . \quad y+\Delta y \\ z &\quad \text{въ} \ldots . \quad z+\Delta z \\ &\cdots\cdots\cdots \\ t &\quad \text{въ} \ldots . \quad t+\Delta t \end{aligned}$$

По извѣстной формулѣ будетъ:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y'\ \Delta x+\varepsilon_1\ \Delta x \\ \Delta z &= z'\ \Delta x+\varepsilon_2\ \Delta x \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Delta t &= t'\ \Delta x+\varepsilon_k\ \Delta x \end{aligned}$$

причемъ ε_1 ε_2 . . . . ε_k суть безконечно-малыя величины одновременно съ Δx.

Итакъ, въ силу формулы (*), которая имѣетъ мѣсто *при всякихъ* безконечно-малыхъ Δx, Δy, Δz . . . . Δt, зависящихъ ли другъ отъ друга или нѣтъ, будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \Delta V &= f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ \ldots .\ t+\Delta t) - f(x,\ y,\ z,\ \ldots .\ t) \\ &= f_x'(x, y, \ldots t)\cdot\Delta x + f_y'(x, y, \ldots t)\cdot\Delta y + \ldots + f_t'(x, y, \ldots t)\cdot\Delta t \\ &\quad + \beta_1\ \Delta x + \beta_2\ \Delta y + \ldots . + \beta_k\ \Delta t \end{aligned}$$

подставляя-же вмѣсто Δy, Δz, ... Δt ихъ величины, увидимъ, что выраженіе ΔV приметъ слѣдующій видъ:

$$\Delta V = [f_x'(x, y, \ldots . t) + f_y'(x, y, \ldots . t) \cdot y' +$$
$$+ f_z'(x, y, \ldots . t) \cdot z' + \ldots . + f_t'(x, y, \ldots . t) \cdot t'] \Delta x +$$
$$+ \gamma \cdot \Delta x.$$

гдѣ черезъ γ обозначена нѣкоторая безконечно-малая величина, содержащая ε_1, ε_2 . . . . β_1 . . . β_k, и обращающаяся въ нуль одновременно съ Δx.

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = [f_x'(x, y, \ldots t) + f_y'(x, y, \ldots t) \cdot y' + \ldots +$$
$$+ f_t'(x, y, \ldots t) \cdot t'] + \gamma$$

отсюда слѣдуетъ, что предѣлъ отношенія $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ равняется той величинѣ, которая стоитъ въ [ ], значитъ.

$$V' = \text{пред.} \frac{\Delta V}{\Delta x} = f_x'(x, y, \ldots t) + f_y'(x, y, \ldots t) \cdot y' + \ldots +$$
$$+ f_t'(x, y, \ldots t) \cdot t'.$$

Эта формула, которую принявъ указанное въ § 36 обозначеніе частныхъ производныхъ, можно писать и такъ:

$$V' = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot z' + \ldots . + \frac{\partial V}{\partial t} \cdot t' \ldots (1)$$

или такъ:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} + \ldots . + \frac{\partial V}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \quad (2)$$

и выражаетъ слѣдующее общее правило дифференцированія сложной функціи:

Полная производная сложной функціи равна суммѣ частныхъ ея производныхъ, взятыхъ по каждой изъ перемѣнныхъ, входящихъ въ составъ функціи, умноженныхъ соотвѣтственно на производную этой перемѣнной.

При этомъ надо помнить, что производная самой перемѣнной независимой x есть 1.

Умноживъ обѣ части равенства (1) или (2) на dx получимъ формулу:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dy + \ldots + \frac{\partial V}{\partial t} \cdot dt.$$

сличивъ которую съ форм. § 36 видимъ, что дифференціалъ функціи V выражается совершенно одинаково въ обоихъ случаяхъ. Такимъ образомъ имѣемъ слѣдующую общую теорему:

Отъ какихъ бы величинъ ни зависѣла функція V, дифференціалъ ея выражается такъ-же, какъ будто-бы всѣ эти величины были **перемѣнныя независимыя.**

Легко изъ этой общей формулы получить всѣ теоремы о производной и дифференціалѣ суммы произведенія, частнаго.

Напр

$$V = \frac{u}{v}$$

тогда въ силу предыдущаго правила надо взять частную производную отъ V по u и умножить на u', затѣмъ взять частную производную по v и умножить на v' и оба результата сложить.

Имѣемъ:

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial\left(\frac{1}{v}u\right)}{\partial u} = \frac{1}{v}$$

$$\frac{\partial V}{\partial v} = \frac{\partial\left(u \cdot \frac{1}{v}\right)}{\partial v} = -u \cdot \frac{1}{v^2}$$

значитъ

$$V' = \frac{\partial V}{\partial u} \cdot u' + \frac{\partial V}{\partial v} \cdot v' = \frac{1}{v}u' - \frac{u \cdot v'}{v^2} = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Совершенно также

$$V = u^v$$

$$\frac{\partial V}{\partial v} = v \cdot u^{v-1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial v} = u^v \cdot \log u$$

значитъ

$$V' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \log u \cdot v' = u^v \left| \frac{u'}{u} + v' \log u \right|.$$

Примѣръ: $S = u^{v^w}$.

Получимъ:

$$\frac{\partial S}{\partial u} = v^w \cdot u^{v^w - 1} = u^{v^w} \cdot v^n \cdot \frac{1}{u}$$

$$\frac{\partial S}{\partial v} = u^{v^w} \cdot \log u \cdot \frac{\partial v^w}{\partial v} = u^{v^w} \log w \cdot v^{w-1} = u^{v^w} \cdot v^w \cdot \frac{w}{v} \cdot \log u$$

$$\frac{\partial S}{\partial w} = u^{v^w} \cdot \log u \cdot \frac{\partial v^w}{\partial w} = u^{v^w} \cdot \log u \cdot v^w \cdot v = u^{v^w} \cdot v^w \cdot \log u \cdot \log v$$

и слѣдовательно производная S есть:

$$S' = \frac{\partial S}{\partial u} \cdot u' + \frac{\partial S}{\partial v} v' + \frac{\partial S}{\partial w} w' =$$

$$= u^{v^w} \cdot v^w \left\{ \frac{u'}{u} + w \cdot \frac{v'}{v} \cdot \log u + w' \log u \cdot \log v \right\}$$

Собраніе примѣровъ на дифференцированіе явныхъ функцій съ двумя и многими перемѣнными независимыми

1. $u = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$;

$$du = 3\,(3x - 2y)^2\,(3dx - 2dy).$$

2. $u = \operatorname{arc\,Sin} \frac{(x^2 - y^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$;

$$du = \frac{2^{1/2} x}{(x^2 + y^2)\,(x^2 - y^2)^{1/2}}\,(ydx - xdy).$$

3. $u = \log \frac{x + (x^2 - y^2)^{1/2}}{x - (x^2 - y^2)^{1/2}}$; $du = \frac{2\,(xdy - ydx)}{y\,(x^2 - y^2)^{1/2}}$.

4. $u = \text{arc tang} \frac{2x + y - x^2 y}{1 - 2xy - x^2}$; $du = \frac{2dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{1 + y^2}$.

5. $u = \text{arc Cos} \frac{1 - xy}{(1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2)^{1/2}}$; $du = \frac{dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{1 + y^2}$.

6. $u = \log \text{tang} \frac{x}{y}$; $du = \frac{2\,(ydx - xdy)}{y^2 \,\text{Sin}\, \frac{2x}{y}}$.

7. $u = \frac{ay - bz}{cz - ax}$; $du = \frac{(ay - bz)\,dx + (cz - ax)\,dy + (bx - cy)\,dz}{(cz - ax)^2}$.

8. $u = \frac{e^z\, y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$; $du = \frac{ye^z\, dz}{(x^2 + y^2)^{1/2}} + \frac{xe^z\,(xdy - ydx)}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$.

9. $u = \text{Sin}\, x\, \text{Cos}\, y\, \text{Sin}\, z + \text{Cos}\, x\, \text{Sin}\, y\, \text{Sin}\, z +$
$+ \text{Cos}\, x\, \text{Cos}\, y \text{Cos}\, z - \text{Sin}\, x\, \text{Sin}\, y\, \text{Cos}\, z$:
$du = (dz - dy - dx)\, \text{Sin}\, (x + y - z)$.

10. $u = x^y$; $du = x^{y-1}\,(ydx + x \log x dy)$.

11. $u = xy + xz + yz$; $du = (y + z)\,dx + (x + z)\,dy +$
$+ (x + y)\,dz$.

12. $u = x \log y$; $du = \log y dx + x \frac{dy}{y}$.

13. $u = x^2 + y^2$; $du = 2\,(xdx + ydy)$.

14. $u = a^2 y^2 + b^2 x^2$; $du = 2a^2 ydy + 2b^2 xdx$.

15. $u = 3y^2 + 2xy + 5x^2 - 2x + y - z$:
$du = (2y + 10x - 2)\,dx + (6y + 2x + 1)\,dy - dz$.

16. $u = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$; $du = \frac{2xy\,(ydx - xdy)}{(x^2 + y^2)^{3/2}\,(x^2 - y^2)^{1/2}}$.

17. $u = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x + y}$;

$$du = \frac{y^{1/2}\,(y - x - 2\,[xy]^{1/2})\,dx + x^{1/2}\,(x - y - 2\,[xy]^{1/2})\,dy}{2\,(xy)^{1/2}\,(x + y)^2}.$$

18. $u = z^{y^x}$; $du = y^x z^{y^x}\left(\log y \log z\, dx + \frac{x}{y}\log z\, dy + \frac{dz}{z}\right)$.

19. $u = \text{arc Sin}\left(\frac{x}{y}\right)$; $du = \frac{ydx - xdy}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$.

20. $u = \text{arc tang}\left(\frac{x}{y}\right)$; $du = \frac{ydx - xdy}{y^2 + x^2}$.

21. $u = \frac{x^2 y}{a^2 - z^2}$; $du = \frac{x}{a^2 - z^2}\left(2ydx + xdy + \frac{2xyzdz}{a^2 - z^2}\right)$.

22. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} + \text{arc tang}\,\frac{x}{z} + \frac{z^2}{2}$;

$$du = \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{zdx + xdz}{z^2 + x^2} + zdz.$$

Это собраніе примѣровъ заимствовано изъ указаннаго на стр. 78 курса проф. Поссе.

ГЛАВА IV.

Дифференцированіе функцій неявныхъ.

Дифференцированіе неявной функціи одной перемѣнной.

§ 39. Изложенныя въ предыдущихъ §§ правила даютъ возможность находить производныя и дифференціалы любой функціи отъ одной или нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ, когда указаны тѣ дѣйствія, которыя надо произвести надъ перемѣнными независимыми, чтобы получить функцію, иначе, когда эта функція *явная*. Остается показать, какимъ образомъ находятся производныя функцій *неявныхъ*.

Принципъ, на которомъ основывается дифференцированіе неявныхъ функцій слѣдующій: *результатъ дифференцированія всякаго тождества есть опять тождество.*

Напримѣръ:

$$x^2 - x^2 = 0$$

даетъ

$$2x - 2x = 0$$

Начнемъ съ простѣйшаго случая одной перемѣнной независимой и одной ея неявной функціи.

Пусть перемѣнная независимая есть x и ея функція y опредѣляется уравненіемъ:

$$f(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Если бы уравненіе (1) можно было рѣшить относительно y, то y выразилось бы явною функціей отъ x и его производная нашлась бы по правиламъ, изложеннымъ выше; но рѣшеніе уравненія (1) часто невозможно, и надо показать, какъ найти производную y, *не рѣшая* уравненія (1).

Изъ алгебры извѣстно, что когда имѣется какое угодно уравненіе, то величина неизвѣстной, ему удовлетворяющая, обращаетъ его въ тождество, это значитъ. что если изъ даннаго уравненія выведена величина неизвѣстной и затѣмъ въ это уравненіе подставлена, то получится тождество.

Вообразимъ же себѣ, что уравненіе (1) рѣшено относительно y, и найденная величина его въ это уравненіе подставлена, то получится тождество, котораго первая часть будетъ сложная функція $f(x, y)$ отъ перемѣнной x, ибо y будетъ функція этой перемѣнной.

По высказанному принципу, дифференцируя это тождество, будемъ получать новыя тождества, а именно:

Изъ тождества:

$$f(x, y) = 0$$

дифференцируя по правилу § 25, имѣемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Сопоставляя это равенство съ (1), можемъ сказать, что когда y удовлетворяетъ уравненію (1), то ея производная y' удовлетворяетъ уравненіе (2).

Изъ уравненія-же (2) имѣемъ:

$$y' = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Замѣтимъ, что здѣсь y' будетъ содержать, не только букву x. но и y.

Примѣръ. Пусть уравненіе (1) есть:

$$f(xy) = y^2 - 4xy + x^2 - a^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

тогда

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4x; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -4y + 2x$$

и значитъ

$$y' = - \frac{2x - 4y}{2y - 4x} = \frac{2y - x}{y - 2x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Здѣсь уравненіе (1) легко рѣшить относительно y, именно получимъ

$$y = 2x + \sqrt{3x^2 + a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

разумѣя при корнѣ оба знака.

Значитъ

$$y' = 2 + \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + a^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (**)$$

Покажемъ, что величина (**) удовлетворяетъ уравненію (2) когда въ немъ y будетъ замѣнено его величиною слѣдующей изъ (1).

Въ нашемъ случаѣ уравненіе (2) будетъ:

$$(2x - 4y) + (2y - 4x)\,y' = 0; \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

послѣ подстановки оно обратится въ такое:

$$2x - 4\left(2x + \sqrt{3x^2 + a^2}\right) + \left[2\left(2x + \sqrt{3x^2 + a^2}\right) - 4x\right] \cdot \left(2 + \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + a^2}}\right) = 0$$

или

$$-6x - 4\sqrt{3x^2 + a^2} + 2\sqrt{3x^2 + a^2}\left(2 + \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + a^2}}\right) = 0$$

или

$$-6x - 4\sqrt{3x^2 + a^2} + 4\sqrt{3x^2 + a^2} + 6x = 0$$

очевидное тождество.

Величина (3) y' послѣ подстановки вмѣсто y его величины (*) обратится въ (**), дѣйствительно:

$$y' = \frac{2y - x}{y - 2x} = \frac{4x + 2\sqrt{3x^2 + a^2} - x}{2x + \sqrt{3x^2 + a^2} - 2x} = 2 + \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + a^2}}.$$

Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующее правило: *Для нахожденія производной неявной функціи слѣдуетъ дифференцировать то уравненіе, которымъ она опредѣляется, разсматривая первую его часть, какъ сложную функцію, и полученное такимъ образомъ уравненіе рѣшить относительно искомой производной.*

Нахожденіе производныхъ нѣсколькихъ неявныхъ функцій.

§ 40. Изложенное разсужденіе примѣняется какъ къ нѣсколькимъ функціямъ одной перемѣнной, такъ и къ нѣсколькимъ неявнымъ функціямъ многихъ перемѣнныхъ независимыхъ.

Пусть x перемѣнная независимая и y, z, u ея неявныя функціи, число которыхъ для простоты письма мы поло-

жимъ равнымъ тремъ: эти функціи опредѣляются *тремя* уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,\ y,\ z,\ u) &= 0 \\ f_2(x,\ y,\ z,\ u) &= 0 \\ f_3(x,\ y,\ z,\ u) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

которыя должны быть таковы, чтобы они допускали рѣшеніе относительно буквъ y, z, u, т. е. чтобы ни одно изъ этихъ уравненій не было слѣдствіемъ двухъ другихъ, или, иначе, чтобы изъ этихъ уравненій нельзя было вывести такого, которое ни одной изъ буквъ y, z, u не содержало бы.

Если бы уравненія (1) относительно буквъ y, z, u рѣшить и найденныя рѣшенія подставить, то получились бы три тождества, коихъ первыя части представляли бы собою сложныя функціи буквы x. Дифференцируя эти тождества, получимъ новыя тождества, именно:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot y' + \frac{\partial f_1}{\partial z}\cdot z' + \frac{\partial f_1}{\partial u}\cdot u' &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\cdot y' + \frac{\partial f_2}{\partial z}\cdot z' + \frac{\partial f_2}{\partial u}\cdot u' &= 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial y}\cdot y' + \frac{\partial f_3}{\partial z}\cdot z' + \frac{\partial f_3}{\partial u}\cdot u' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (2)$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что производныя y', z', u', функцій y, z, u удовлетворяющихъ системѣ уравненій (1), удовлетворяютъ системѣ уравненій (2); значитъ, для нахожденія этихъ производныхъ, стоитъ только рѣшить систему уравненій (2) относительно величинъ y', z', u', принимаемыхъ за неизвѣстныя. Какъ видно эта система будетъ *первой* степени относительно этихъ неизвѣстныхъ и будетъ заключать въ себѣ столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ.

Примѣръ. Даны уравненія:

$$\left.\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= 0 \\ x + y + z - a &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

найти

$$y' = \frac{dy}{dx} \text{ и } z' = \frac{dz}{dx}$$

Дифференцируя уравненія (1), имѣю:

$$\left.\begin{aligned} (3x^2 - 3yz) + (3y^2 - 3xz)\, y' + (3z^2 - 3xy)\, z' &= 0 \\ 1 + y' + z' &= 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Откуда:

$$y' = \frac{z - x}{y - z}$$

$$z' = \frac{x - y}{y - z}$$

Дифференц. неявныхъ функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ.

§ 41. Послѣ данныхъ въ предыдущихъ §§ объясненій не трудно показать рѣшеніе и самаго общаго случая, т. е. того, когда имѣется нѣсколько перемѣнныхъ независимыхъ и нѣсколько неявныхъ ихъ функцій, опредѣляемыхъ столькими уравненіями, сколько этихъ функцій.

Положимъ для простоты письма, что имѣется *три* перемѣнныхъ независимыхъ x, y, z и *двѣ* неявныхъ ихъ функціи u и v опредѣляемыя уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, u, v) &= 0 \\ \varphi(x, y, z, u, v) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и

Требуется найдти частныя производныя этихъ функцій по каждой изъ перемѣнныхъ.

Найдемъ сперва частныя производныя по перемѣнной x, и что мы скажемъ объ этой перемѣнной, то можемъ потомъ повторить и относительно остальныхъ.

Разсуждать будемъ совершенно также какъ и выше, т. е. воображаемъ, что система уравненій (1) рѣшена относительно буквъ u и v, разсматриваемыхъ какъ неизвѣстныя, и затѣмъ найденныя величины подставлены въ уравненія (1); тогда получится два тождества, которыя дифференцируемъ по буквѣ x; при этомъ остальныя перемѣнныя независимыя y и z разсматриваются какъ постоянныя, u и v какъ функціи отъ x, и слѣдовательно первыя части упомянутыхъ тождествъ представляютъ собою *сложныя* функціи буквы x.

Производя дифференцированіе, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot u_x' + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot v_x' = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot u_x' + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot v_x' = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Эти равенства, которыя обращаются въ тождества, если вмѣсто u и v подставить ихъ величины, слѣдующія изъ уравненій (1), показываютъ, что когда u и v удовлетворяютъ уравненіямъ (1), то ихъ частныя производныя u_x' и v_x' по перемѣнной x, удовлетворяютъ уравненіямъ (2). Слѣдовательно, рѣшивъ уравненія (2) относительно буквъ u_x' и v_x', разсматриваемыхъ какъ неизвѣстныя, мы и получимъ требуемыя частныя производныя по перемѣнной x нашихъ неявныхъ функцій.

Такъ какъ уравненія (2) относительно буквъ u_x' и v_x' *первой* степени, то рѣшеніе ихъ не можетъ представить никакихъ затрудненій.

Совершенно также будемъ поступать и по отношенію каждой изъ остальныхъ перемѣнныхъ независимыхъ.

Само собою понятно, что вмѣсто двухъ неявныхъ функцій u и v ихъ могло бы быть сколько угодно, лишь бы число уравненій было равно числу этихъ функцій—приведенное разсужденіе остается въ силѣ.

Такимъ образомъ имѣемъ такое общее правило: *Чтобы найти частныя производныя отъ неявныхъ функцій по какой-нибудь перемѣнной, надо продифференцировать по этой перемѣнной всѣ уравненія, опредѣляющія заданныя функціи, разсматривая первыя части этихъ уравненій, какъ сложныя функціи, — получится новая система уравненій* **первой** *степени относительно искомыхъ производныхъ. Рѣшивъ эту систему и найдемъ требуемыя производныя.*

Примѣры: 1) Найти частныя производныя двухъ неявныхъ функцій r и θ отъ x и y опредѣляемыхъ уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{Sin}\,\theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Для полученія производныхъ по x дифференцируемъ оба уравненія по этой перемѣнной, имѣемъ:

$$1 = \mathrm{Cos}\,\theta\,\frac{\partial r}{\partial x} - r\,\mathrm{Sin}\,\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$0 = \mathrm{Sin}\,\theta\,\frac{\partial r}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

Откуда:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \mathrm{Cos}\,\theta;\quad \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\mathrm{Sin}\,\theta}{r}$$

Совершенно также для полученія производныхъ по y имѣемъ уравненія:

$$0 = \mathrm{Cos}\,\theta\,\frac{\partial r}{\partial y} - r\,\mathrm{Sin}\,\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$1 = \mathrm{Sin}\,\theta\,\frac{\partial r}{\partial y} + r\cos\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

Откуда:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \mathrm{Sin}\,\theta$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\mathrm{Cos}\,\theta}{r}$$

Задача 2. Въ формулахъ (1) принять θ и y за перемѣнныя независимыя и найти производныя $\frac{\partial r}{\partial y}$ и $\frac{\partial x}{\partial y}$; полученныя результаты объяснить геометрически.

Дифференцируемъ по y уравненія

$$x = r \operatorname{Cos} \theta$$

$$y = r \operatorname{Sin} \theta$$

принимая y и θ за перемѣнныя независимыя, это значитъ что когда диффер. по y, то θ считается постоянною, имѣемъ:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \operatorname{Cos} \theta \cdot \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$1 = \operatorname{Sin} \theta \cdot \frac{\partial r}{\partial y}$$

Откуда:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{Sin} \theta}$$

и

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\operatorname{Cos} \theta}{\operatorname{Sin} \theta} = \operatorname{cotg} \theta.$$

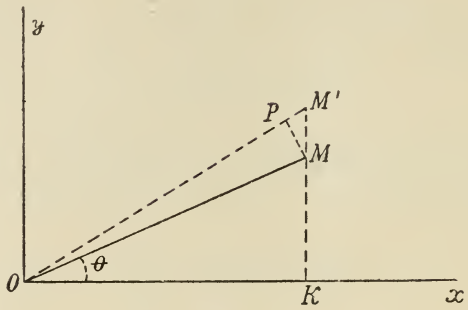
Чтобы получить эти результаты геометрически, обратимся къ чертежу. Формулы (1) представляютъ собою зависимость прямоугольныхъ координатъ произвольной точки на плоскости отъ полярныхъ координатъ той же точки. (Черт. 9).

$$OM = r$$
$$MOx = \theta$$
$$OK = x$$
$$KM = y$$

Когда x и y приняты за перемѣнныя независимыя и надо найти $\frac{\partial r}{\partial y}$, то это значитъ, что надо найти пред. $\frac{\Delta_y r}{\Delta y}$ *причемъ* x *остается постояннымъ.* Пусть $MM' = \Delta y$ тогда $OM' = r + \Delta_y r$ и значитъ $\Delta_y r = PM'$, а такъ какъ въ предѣлѣ

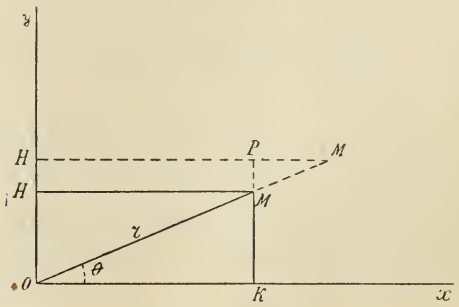
дуга PM сольется съ своею касательной, треугольникъ MPM' будетъ прямоугольный при P, уголъ же PMM' будетъ равенъ θ, то пред. $\frac{PM'}{MM'}$ = пред. $\frac{\Delta_y r}{\Delta y} = \frac{\partial r}{\partial y} = \text{Sin } \theta$.

Черт. 9.



Обратимся теперь ко второму случаю, когда за перемѣнныя независимыя приняты y и θ, x-же и r разсматриваются какъ неявныя функціи. (Черт. 10).

Черт. 10.



При нахожденіи производной $\frac{\partial r}{\partial y}$ величина угла θ должна оставаться постоянной, слѣдовательно давъ y приращеніе Δy, мы соотвѣтствующую точку M', у которой, координаты будутъ $y + \Delta y$ и θ, получимъ, какъ указано на черт. (10) гдѣ $HH' = \Delta y$. Изъ треугольника MPM' видно, что $\frac{MM'}{PM} =$ $= \text{cosec } MM'P = \frac{1}{\text{Sin } \theta}$ и въ предѣлѣ будетъ: пред. $\frac{MM'}{PM} =$ $=$ пред. $\frac{\Delta_y r}{\Delta y} = \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{\text{Sin } \theta}$.

Задача 1. Въ формулахъ

$$x = r \operatorname{Cos} \theta$$

$$y = r \operatorname{Sin} \theta$$

принимать по очереди любую пару буквъ за перемѣнныя независимыя и находить частныя производныя остальныхъ двухъ, поясняя всякій разъ полученный результатъ геометрически.

Задача 2. Найти всѣ частныя производныя $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ . . . . $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ неявныхъ функцій r, ϑ и φ, опредѣляемыхъ уравненіями:

$$x = r \operatorname{Sin} \vartheta \cdot \operatorname{Cos} \varphi$$

$$y = r \operatorname{SIn} \vartheta \cdot \operatorname{Sin} \varphi$$

$$z = r \operatorname{Cos} \vartheta$$

Задача 3. Показать, что при нахожденіи частныхъ производныхъ неявныхъ функцій $V_1, V_2, \ldots V_k$ опредѣляемыхъ k, уравненіями вида

$$F_i(x, y, z \ldots . t, V_1, V_2, \ldots . V_k) = 0 \ (i = 1, 2, \ldots . k)$$

можно поступать такъ: взять *полные* дифференціалы первыхъ частей этихъ уравненій, что даетъ k уравненій вида:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} dx + \frac{\partial F_i}{\partial y} \cdot dy + \ldots . + \frac{\partial F_i}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial F_i}{\partial V_1} dV_1 +$$

$$+ \frac{\partial F_i}{\partial V_2} dV_2 + \ldots . \frac{\partial F_i}{\partial V_k} dV_k = 0,$$

рѣшить эти уравненія относительно

$$dV_1, \ dV_2, \ \ldots . \ dV_k,$$

въ полученныхъ рѣшеніяхъ отобрать всѣ члены съ множителями dx, dy, ... dt, т. е. представить эти рѣшенія въ видѣ:

$$dV_i = K_i\,dx + L_i\,dy + N_i\,dz + \ldots\ldots + P_i\,dt$$

гдѣ K_i, L_i, ... P_i будутъ функціи буквъ:

$$x,\ y,\ z,\ \ldots\ldots t,\ V_1,\ V_2,\ \ldots\ldots V_k$$

тогда

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = K_i;\ \frac{\partial V_i}{\partial y} = L_i\ \ldots\ldots\ \frac{\partial V_i}{\partial t} = P_i$$

Примѣнить этотъ пріемъ къ задачѣ 2.

ГЛАВА V.

Производныя и дифференціалы высшихъ порядковъ.

Производныя высшихъ порядковъ.

§ 42. Пусть будетъ задана функція

$$y = f(x)$$

перемѣнной независимой x.

Производная этой функціи будетъ новая функція отъ x, именно:

$$y' = f'(x).$$

Отъ y' можно опять взять производную, которую обозначимъ черезъ y'', такъ что

$$y'' = (y')' = f''(x)$$

эта производная y'' называется *второю* производною, или производною *второго* порядка отъ функціи y.

Точно также производная отъ производной второго порядка называется производною *третьяго* порядка отъ y.

Вообще: производная отъ производной $n^{\text{аго}}$ порядка называется производною $(n+1)^{\text{аго}}$ порядка, т. е.

$$(y^{(n)})' = y^{(n+1)} = f^{(n+1)}(x)$$

Такъ напр., пусть

$$y = \log x$$

тогда

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1 \cdot 2}{x^3}$$

$$y^{\text{IV}} = \left(\frac{1 \cdot 2}{x^3}\right)' = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}$$

и такъ далѣе.

Лишь для весьма немногихъ функцій можно составить общее выраженіе производной неопредѣленнаго порядка n.

Приведемъ здѣсь простѣйшія изъ этихъ функцій.

1) Пусть

$$y = (a+bx)^k$$

гдѣ a, b и k какія угодно постоянныя.

Имѣемъ:

$$y' = k \cdot b \cdot (a+bx)^{k-1}$$

$$y'' = k \cdot (k-1) \cdot b^2 (a+bx)^{k-2}$$

$$y''' = k\,(k-1) \cdot (k-2) \cdot b^3 (a+bx)^{k-3}$$

и т. д.

По аналогіи заключаемъ, что

$$y^{(n)} = k(k-1)\ldots(k-n+1)\cdot b^n(a+bx)^{k-n} \quad . \quad . \quad (*)$$

и принявъ эту формулу справедливою для n, покажемъ, что она будетъ справедлива и для $(n+1)$; дѣйствительно:

$$y^{(n+1)} = (y^n)' = k(k-1)\ldots(k-n+1)(k-n)\cdot b^{n+1}(a+bx)^{k-n-1}$$

этотъ же результатъ получится и изъ формулы (*), замѣнивъ въ ней n на $n+1$. Значитъ, если формула (*) справедлива для n, то она справедлива и для $n+1$; а такъ какъ эта формула очевидно справедлива для $n=2$, то значитъ она справедлива и вообще. Этотъ пріемъ примѣняется обыкновенно и для нахожденія производной $n^{\text{аго}}$ порядка другихъ функцій, т. е. находятъ сперва нѣсколько послѣдовательныхъ производныхъ начиная съ первой, и по разсмотрѣніи того, какъ послѣдовательная производная составляется изъ предыдущей, пишутъ формулу для $n^{\text{ой}}$ производной и доказываютъ ея справедливость переходомъ отъ n къ $n+1$.

И такъ, если

$$y = (a+bx)^k$$

то

$$y^{(n)} = k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)\cdot b^n(a+bx)^{k-n}.$$

Обратимъ вниманіе на нѣкоторые частные случаи этой формулы.

1) Когда k число цѣлое и положительное, то сдѣлавъ $n=k$ получимъ:

$$y^{(k)} = k(k-1)\ldots(k-k+1)\cdot b^k\cdot(a+bx)^0$$
$$= 1\,.\,2\,.\,3\,.\ldots.\,k\cdot b^k$$

т. е. $y^{(\kappa)}$ есть величина постоянная, а значитъ всѣ производныя слѣдующихъ порядковъ равны 0, т. е.

$$y^{(\kappa+1)} = y^{(\kappa+2)} = \ldots = 0$$

2) Пусть

$$k = -1$$

тогда

$$y = (a + bx)^{-1} = \frac{1}{a+bx}$$

и по формулѣ (*) имѣемъ:

$$y^{(n)} = (-1)(-2)(-3)\ldots(-n)\cdot b^n \cdot (a+bx)^{-(n+1)}$$

$$= (-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot b^n \cdot \frac{1}{(a+bx)^{n+1}} \quad . \quad . \quad (**)$$

3) Пусть

$$y = \log(a+bx)$$

тогда очевидно

$$y' = \frac{b}{(a+bx)} = b \cdot (a+bx)^{-1}$$

стоитъ только въ формулѣ (**) вмѣсто n написать $n-1$ и мы получимъ

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot b^n \cdot (a+bx)^{-n}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot b^n}{(a+bx)^n}$$

Задача. Пусть

$$y = \operatorname{arc\,tg}\, x$$

найдти

$$y^{(n)}.$$

Сдѣлаемъ для сокращенія письма

$$\sqrt{-1} = i$$

тогда имѣемъ:

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(x+i)(x-i)} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right] =$$
$$= \frac{i}{2}\left[(x+i)^{-1} - (x-i)^{-1}\right]$$

такъ какъ

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)}$$

то стоитъ только въ формулѣ (**) вмѣсто n подставить $n-1$, и положить $b=1$ и $a=i$, затѣмъ $b=1$, $a=-i$ и умножить на $\frac{i}{2}$ разность полученныхъ результатовъ, тогда будемъ имѣть:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot i}{2} 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)\left[(x+i)^{-n} - (x-i)^{-n}\right] =$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}\cdot i}{2} 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)\left[\frac{1}{(i+x)^n} - \frac{1}{(x-i)^n}\right] =$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}\cdot i}{2} 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)\frac{(x-i)^n - (x+i)^n}{(1+x^2)^n}.$$

Но мы имѣемъ:

$$(x-i)^n = x^n - nx^{n-1}\cdot i - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-1}\cdot i + \ldots$$

$$(x+i)^n = x^n + nx^{n-1}i - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}i + \ldots$$

Вычитая получимъ:

$$(x-i)^n - (x+i)^n = -2i\left[nx^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3} + \frac{n(n-1)\cdots(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^{n-5} - \ldots\right]$$

и по подстановкѣ найдемъ:

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\,1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot\frac{nx^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3} + \ldots}{(1+x^2)^n}$$

4) Пусть

$$y = e^{ax}$$

гдѣ a какая угодно постоянная. Тогда

$$y' = ae^{ax}$$
$$y'' = a^2 . e^{ax}$$
$$\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = a^n . e^{ax}$$

5) Точно также, если

$$y = a^x$$

то

$$y' = a^x \log a$$
$$y'' = a^x . (\log a)^2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = a^x . (\log a)^n.$$

6) Возьмемъ

$$y = \operatorname{Sin} x$$

тогда послѣдовательно получимъ:

$$y' = \operatorname{Cos} x = \operatorname{Sin}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y'' = -\operatorname{Sin} x = \operatorname{Sin}\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y''' = -\operatorname{Cos} x = \operatorname{Sin}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = \qquad = \operatorname{Sin}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

7) Совершенно также, если

$$y = \operatorname{Cos} x$$

то

$$y' = -\operatorname{Sin} x = \operatorname{Cos}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\operatorname{Cos} x = \operatorname{Cos}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

. . . . . .

$$y^{(n)} = \qquad = \operatorname{Cos}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

8) Покажемъ теперь производную какого угодно порядка отъ произведенія двухъ функцій u и v.

Пусть

$$y = u \cdot v$$

тогда:

$$y' = u'v + v'u$$

$$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' =$$

$$= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Какъ видно, въ этихъ формулахъ коэффиціенты при послѣдовательныхъ членахъ биноміальные, т. е. такіе же какъ при разложеніи $(a+b)^n$. Порядки производной u начинаясь съ $n^{\text{аго}}$ уменьшаются до 0; порядки же производныхъ v, начиная съ нулеваго выростаютъ до n, совершенно подобно тому, какъ выростаютъ и убываютъ степени буквъ a и b въ разложеніи $(a+b)^n$. Въ виду такой аналогіи можно написать формулу:

$$y^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(1-n)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot u^{(n-3)}v''' + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}u'''v^{n-3)} +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u''v^{(n-2)} + nu'v^{(n-1)} + uv^{(n)}$$

и допустивъ ея справедливость для n, легко показать, что она будетъ справедлива и для $n+1$, что и предлагается сдѣлать въ видѣ задачи.

Выше написанная формула называется формулою Лейбница.

§ 43. Когда $y = f(x)$ есть какая нибудь функція отъ x, то нетолько ея производная $y' = f'(x)$ будетъ новой функціей отъ x, но также и дифференціалъ, именно будетъ: Дифференціалы высшихъ порядковъ.

$$dy = y'\,dx = f'(x)\,dx.$$

Какъ видно dy заключаетъ два перемѣнныхъ множителя $y' = f'(x)$ и dx: сдѣлаемъ относительно множителя dx слѣдующее условіе: *Будемъ считать дифференціалъ перемѣнной независимой произвольною безконечно малою величиною, но не содержащей сказанной перемѣнной независимой, такъ что, при дифференцированіи по этой перемѣнной, дифференціалъ ея слѣдуетъ разсматривать какъ величину постоянную.*

Мы вправѣ сдѣлать такое условіе, ибо Δx, или dx при всѣхъ выводахъ предполагалась совершенно произвольною безконечно-малою величиной и можно ее взять или какъ функцію отъ x, или же считать несодержащею этой перемѣнной; въ этомъ послѣднемъ случаѣ всѣ формулы будутъ проще, поэтому и удобнѣе сдѣлать высказанное выше условіе.

Подобно тому, какъ мы опредѣляли производную $2^{\text{аго}}$, $3^{\text{го}}$ . . . . $n^{\text{аго}}$ порядка, опредѣлимъ и дифференціалъ $2^{\text{аго}}$, $3^{\text{го}}$ . . . . . $n^{\text{аго}}$ порядка, а именно: дифференціалъ отъ дифференціала заданной функціи т. е. $d(dy)$ обозначаютъ знакомъ d^2y и называютъ дифференціаломъ второго порядка; дифференціалъ отъ дифференціала $2^{\text{аго}}$ порядка, т. е. $d(d^2y)$ обозначаютъ знакомъ d^3y и называютъ дифференціаломъ третьяго порядка и т. д.; вообще дифференціалъ отъ дифференціала $(n-1)^{\text{аго}}$ порядка $d^{n-1}y$, т. е. $d(d^{n-1}y)$ обозначаютъ знакомъ d^ny и называютъ дифференціаломъ $n^{\text{аго}}$ порядка.

Покажемъ теперь, что въ *силу высказаннаго выше условія* имѣетъ мѣсто слѣдующая зависимость между дифференціаломъ порядка n и производною того-же порядка именно: *Дифферен-*

ціалъ порядка n равняется производной того-же порядка умноженной на $n^{-ую}$ степень дифференціала перемѣнной независимой и слѣдовательно: *производная порядка n равна дифференціалу того-же порядка, раздѣленному на $n^{-ую}$ степень дифференціала перемѣнной независимой.*

Дѣйствительно, мы имѣемъ:

$$dy = y'dx$$

по опредѣленію $d^2y = d(dy)$; значитъ

$$d^2y = d(y'dx) = dx \cdot d(y'),$$

ибо по условію dx считаемъ за постоянную при дифференцированіи. Но

$$d(y') = (y')' \cdot dx = y''dx$$

ибо $(y')' = y''$, по опредѣленію второй производной. Подставляя, имѣемъ:

$$d^2y = y'' \cdot dx \cdot dx = y''(dx)^2 = y''dx^2,$$

условившись обозначать вообще $n^{ую}$ степень dx, т. е. $(dx)^n$ черезъ dx^n.

Совершенно также имѣемъ

$$d^3y = d(d^2y) = d(y'' \cdot dx^2) = dx^2 \cdot d(y'')$$

но

$$d(y'') = (y'')'dx = y''' \cdot dx$$

значитъ

$$d^3y = y''' \cdot dx^3.$$

Точно также увидимъ, что и вообще:

$$d^ny = y^{(n)} \cdot dx^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и принявъ эту формулу справедливою, для n, легко показать ея справедливость для $n+1$, что и докажетъ ея справедли-

вость вообще, ибо показано, что она вѣрна для $n = 2$ и $n = 3$.

Изъ формулы (1) слѣдуетъ

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2);$$

поэтому часто подобно тому, какъ производную перваго порядка обозначаютъ черезъ $\frac{dy}{dx}$, — производную $2^{\text{аго}}$ порядка обозначаютъ $\frac{d^2y}{dx^2}$, $3^{\text{го}}$ — черезъ $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д. вообще $n^{\text{аго}}$ черезъ $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Но надо помнить, что уравненія (1) и (2) имѣютъ мѣсто лишь при сдѣланномъ выше условіи, именно, что dx не зависитъ отъ x и при дифференцированіи принимается за постоянную.

ГЛАВА VI.

О рядахъ.

Основныя опредѣленія.

§ 44. *Рядомъ называется всякая послѣдовательность величинъ, изъ коихъ каждая опредѣляется мѣстомъ ею въ этой послѣдовательности занимаемымъ.*

Обыкновенно разсматриваютъ ряды, которые можно написать въ одну строку и которые имѣютъ начало u_1.

Такіе ряды будутъ имѣть слѣдующій видъ:

$$u_1 \; u_2 \; u_3 \; . \; . \; . \; . \; u_n \quad \text{и т. д.}$$

такъ напр.:

$$1, \; \frac{1}{2}, \; \frac{1}{3}, \; . \; . \; . \; . \; \frac{1}{n} \; . \; . \; . \; . \; .$$

Можно разсматривать ряды, которые хотя и заключены въ одной строкѣ, но не имѣютъ начала, т. е. ряды такого вида:

$$\ldots u_{-k} \ldots . u_{-3}\ u_{-2}\ u_{-1}\ u_0\ u_1\ u_2\ u_3 \ldots . u_n \ldots \text{ и т. д.}$$

Ниже пояснено какимъ образомъ составляются ряды, которые могутъ быть написаны только на цѣлой плоскости. Существуютъ также ряды, которые можно написать только въ цѣломъ пространствѣ и т. д.

Членъ ряда, занимающій произвольное въ немъ мѣсто называется **общимъ членомъ** *этого ряда.*

Такъ, напримѣръ, для ряда

$$u_1\ u_2 \ldots . u_n \ldots \text{ и т. д.}$$

общій членъ есть u_n, какъ занимающій произвольное $n^{\text{ое}}$ мѣсто, онъ будетъ слѣдовательно нѣкоторою функціей отъ n и такъ какъ рядъ начинается съ члена u_1, то n есть любое цѣлое положительное число не меньшее 1.

Для ряда

$$\ldots . u_{-3}\ u_{-2}\ u_{-1}\ u_0\ u_1\ u_2\ u_3 \ldots . \text{ и т. д.}$$

общій членъ есть также u_n, но здѣсь n есть произвольное цѣлое число, какъ положительное, такъ и отрицательное.

Подобнымъ же образомъ если-бы у насъ было

$$u_{m,\,n} = f(m,\,n)$$

гдѣ m и n произвольныя цѣлыя числа, то $u_{m,\,n}$ былъ бы общимъ членомъ ряда, который можетъ быть написанъ только на цѣлой плоскости въ безчисленномъ множествѣ строкъ и столбцовъ.

Такъ напр. пусть:

$$u_{m,\,n} = \frac{1}{m^2 + n^2}$$

тогда нашъ рядъ будетъ:

$$\frac{1}{1^2+1^2},\ \frac{1}{1^2+2^2},\ \frac{1}{1^2+3^2},\ \frac{1}{1^2+4^2}\ \ldots$$

$$\frac{1}{2^2+1^2},\ \frac{1}{2^2+2^2},\ \frac{1}{2^2+3^2},\ \frac{1}{2^2+4^2}\ +\ \ldots$$

$$\frac{1}{3^2+1^2},\ \frac{1}{3^2+2^2},\ \frac{1}{3^2+3^2},\ \frac{1}{3^2+4^2}\ +$$

. . . . . .

. . . . . .

ясно что онъ занимаетъ собою цѣлую плоскость.

Точно также

$$u_{m,n,p} = f(m, n, p)$$

произведетъ рядъ, который можетъ быть написанъ только въ цѣломъ пространствѣ.

Мы ограничимся лишь разсмотрѣніемъ рядовъ вида:

$$u_1\ u_2\ u_3\ \ldots\ u_n\ \ldots$$

Само собою разумѣется, что въ предыдущемъ идетъ рѣчь о *безконечныхъ* рядахъ т. е. о такихъ, въ каждомъ изъ коихъ число членовъ безконечное. Въ противномъ случаѣ ряды получаютъ названіе *конечныхъ*, такъ напримѣръ, въ элементарной алгебрѣ разсматриваютъ конечную ариѳметическую и конечную геометрическую прогрессіи.

Мы будемъ разсматривать исключительно безконечные ряды, и говоря просто рядъ, будемъ подразумѣвать подъ этимъ безконечный рядъ.

Ряды сходящіеся и расходящіеся.

Обыкновенно по отношенію къ ряду приходится разсматривать предѣлъ, къ которому стремится сумма первыхъ его n членовъ по мѣрѣ увеличенія числа ихъ. Эту сумму пишутъ такъ:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

Подъ словомъ *рядъ* часто разумѣютъ именно эту сумму составленную изъ безчисленнаго множества слагаемыхъ, тогда можно высказать слѣдующія опредѣленія:

Рядъ

$$u_1 + u_2 + u_3 \ldots + u_n + \ldots \text{ и т. д.}$$

называется **сходящимся**, *если сумма первыхъ его n членовъ*

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

стремится къ конечному и опредѣленному предѣлу при неопредѣленномъ возрастаніи числа n взятыхъ членовъ, въ противномъ случаѣ онъ называется **расходящимся.**

Такъ напримѣръ рядъ:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

есть рядъ сходящійся, ибо сумма

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

и очевидно

$$\text{пред. } S_n = 2.$$

Подобнымъ-же образомъ убѣдимся что рядъ

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \ldots$$

есть рядъ расходящійся. Въ самомъ дѣлѣ возьмемъ $n = 2^m$ и напишемъ сумму S_n такъ

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$
$$+ \ldots \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right)$$

тогда сумма въ каждыхъ скобкахъ больше $\frac{1}{2}$, а число такихъ суммъ $m - 1$, и такъ какъ m произвольно велико, то будетъ:

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\ S_n = \underset{m=\infty}{\text{пред.}}\ S_{2^m} = \infty$$

и слѣдовательно рядъ расходящійся.

Сумма ряда.

Въ сходящемся рядѣ предѣлъ, къ которому стремится сумма первыхъ его n членовъ при неопредѣленномъ возрастаніи числа ихъ называется **суммою** *ряда.*

Мы будемъ обозначать эту сумму буквою S, такъ что

$$\text{пред.}\ S_n = S.$$

Расходящійся рядъ согласно этому опредѣленію не имѣетъ суммы.

Остатокъ ряда.

Въ какомъ угодно рядѣ предѣлъ, къ которому стремится разность между суммою первыхъ $n+k$ членовъ и суммою первыхъ n членовъ при неопредѣленномъ возрастаніи числа k называется **остаткомъ** *ряда, соотвѣтствующимъ числу n.*

Мы будемъ его обозначать буквою r_n. Такимъ образомъ будемъ имѣть уравненіе:

$$r_n = \text{пред.}\ (S_{n+k} - S_n) = \underset{k=\infty}{\text{пред.}}\ (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots)$$

Общія условія сходимости рядовъ.

§ 15. **Теорема 1-я.** *Въ сходящемся рядѣ предѣлъ остатка r_n при n безконечно-большомъ есть нуль.*

Въ самомъ дѣлѣ возьмемъ какое-нибудь число членовъ n, тогда будетъ

$$r_n = \underset{k=\infty}{\text{пред.}} (S_{n+k} - S_n)$$

не измѣняя n будемъ неопредѣленно увеличивать число k то будетъ:

$$r_n = \underset{k=\infty}{\text{пред.}} S_{n+k} - S_n$$

но при безконечно-большомъ значкѣ $n+k$ сумма S_{n+k} по опредѣленію сходящагося ряда стремится къ предѣлу S, слѣдовательно:

$$\underset{k=\infty}{\text{пред.}} S_{n+k} = S$$

значитъ

$$r_n = S - S_n.$$

Если теперь мы будемъ неопредѣленно увеличивать n, то опять S_n будетъ стремиться къ предѣлу S, значитъ r_n будетъ стремиться къ нулю ибо:

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}} r_n = \underset{n=\infty}{\text{пред.}} (S - S_n) = S - \underset{n=\infty}{\text{пред.}} S_n = 0.$$

Обратная теорема также справедлива, именно:

Теорема 2-я. *Если для нѣкотораго ряда величина остатка r_n при неопредѣленно возрастающемъ n стремится къ нулю, то этотъ рядъ сходящійся.*

Изъ предположенія теоремы слѣдуетъ, что можно взять число n достаточно большимъ для того, чтобы численная величина r_n была меньше любой напередъ назначенной величины ε, какъ для этого значка n такъ и для всѣхъ бо́льшихъ его значковъ.

Положимъ, что такое значеніе n есть N и что n взято именно такъ, т. е. $n \geqq N$ тогда будетъ

$$[r_n] = \underset{k=\infty}{\text{пред.}} [(S_{n+k} - S_n)] > \varepsilon$$

но S_n для избранной выше величины n есть сумма нѣкотораго конечнаго числа членовъ ряда и, значитъ, есть опредѣленное число A, слѣдовательно будетъ:

$$\underset{k=\infty}{\text{пред.}} [(S_{n+k} - A)] < \varepsilon$$

иначе

$$-\varepsilon < \underset{k=\infty}{\text{пред.}} (S_{n+k} - A) < \varepsilon$$

или

$$A - \varepsilon < \underset{k=\infty}{\text{пред.}} S_{n+k} < A + \varepsilon.$$

Эти неравенства показываютъ, что для суммы S_{n+k} при $k = \infty$, которая и представитъ собою сумму ряда, всегда можно найти два *конечныхъ* значенія $A - \varepsilon$ и $A + \varepsilon$, сколь угодно близкихъ между собой, между которыми эта сумма заключается, отсюда слѣдуетъ, что сказанная сумма имѣетъ предѣлъ, который лежитъ между $A - \varepsilon$ и $A + \varepsilon$, и приближенную величину котораго можно слѣдовательно вычислить съ любою наперед назначенною точностью. А это и значитъ, что предложенный рядъ сходящійся.

Въ силу вышеприведенныхъ теоремъ общее условіе сходимости всякаго ряда можетъ быть высказано такъ:

Для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы остатокъ r_n имѣлъ своимъ предѣломъ 0, когда число взятыхъ членовъ n неопредѣленно возрастаетъ.

Необходимость этого условія слѣдуетъ изъ теоремы 1-ой, достаточность изъ теоремы 2-ой.

Замѣтимъ еще, что такъ какъ r_n представляетъ сумму ряда:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots$$

то r_n обозначаетъ погрѣшность, которую мы сдѣлаемъ въ суммѣ предложеннаго ряда

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

принявъ за нее сумму первыхъ его n членовъ именно:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

Такимъ образомъ всегда будетъ

$$S = S_n + r_n.$$

§ 46. Изъ доказанной въ предыдущемъ § теоремы вытекаетъ такое слѣдствіе: *во всякомъ сходящемся рядѣ предѣлъ общаго члена u_n при возрастаніи значка его n есть ноль.*

Въ самомъ дѣлѣ равенство

$$S = S_n + r_n$$

можно написать такъ:

$$S = S_{n-1} + u_n + r_n$$

откуда слѣдуетъ, что

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

значитъ

$$\text{пред. } u_n = \text{пред. } S_n - \text{пред. } S_{n-1}$$

при неопредѣленномъ-же возрастаніи n будетъ

$$\text{пред. } S_n = S$$

и

$$\text{пред. } S_{n-1} = S$$

слѣдовательно

$$\text{пред. } u_n = 0.$$

Такимъ образомъ если предѣлъ общаго члена ряда u_n при $n = \infty$ не есть 0, то рядъ не можетъ быть сходящимся. Но обратное заключеніе не справедливо, что можно было видѣть на примѣрѣ ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \ldots$$

и слѣдовательно высказанное условіе есть *необходимое*, но *недостаточное*.

Хотя приведенная въ § 45 теорема и даетъ общее условіе сходимости всякаго ряда, но пользованіе этимъ условіемъ на практикѣ, часто представляетъ большія затрудненія, между тѣмъ весьма важно умѣть убѣждаться въ сходимости ряда, ибо только сходящимися рядами можно пользоваться для вычисленій. Поэтому мы приведемъ простѣйшіе признаки сходимости рядовъ, хотя и не общіе, но пользованіе которыми гораздо проще предыдущаго. При установленіи этихъ признаковъ мы различимъ два случая:

1) Когда всѣ члены предложеннаго ряда имѣютъ одинъ и тотъ-же знакъ, т. е. или всѣ они положительные, или всѣ отрицательные.

2) Когда члены ряда поперемѣнно положительные и отрицательные.

Признаки сходимости рядовъ.

§ 47. Когда всѣ члены ряда имѣютъ одинъ и тотъ-же знакъ, то такой рядъ, если члены его отрицательные, можетъ быть замѣненъ рядомъ съ членами положительными, стоитъ только перемѣнивъ знакъ, разсматривать вмѣсто суммы S величину $-S$, поэтому для 1-го случая достаточно разсмотрѣть ряды съ положительными членами.

Итакъ пусть данъ рядъ

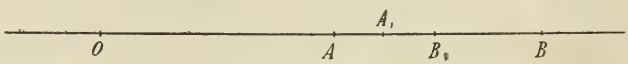
$$u_1 + u_2 + u_3 \ldots + u_n \ldots \ldots \quad (1)$$

всѣ члены котораго положительные, тогда докажемъ во-первыхъ слѣдующую теорему:

Теорема. *Если для ряда съ положительными членами величина S_n при неопредѣленно-возрастающемъ n никогда не будетъ больше нѣкотораго постояннаго числа b, то рядъ этотъ сходящійся.*

Для наглядности разсужденія будемъ откладывать величины S_n на прямой линіи вправо отъ точки O. Пусть напр. $OB = b$. Мы знаемъ, что при измѣненіи n, S_n не перейдетъ дальше B, назначимъ какую-нибудь точку A такъ, что $OA = a$ и OA было бы меньше OB. (Черт. 11).

Черт. 11.



При увеличеніи n сумма S_n или не дойдетъ до a или перейдетъ, положимъ напр. перейдетъ, тогда раздѣлимъ AB пополамъ въ точкѣ B_1 такъ что

$$OB_1 = \frac{a+b}{2} = b_1$$

теперь смотримъ, перейдетъ-ли S_n точку B_1 или не дойдетъ; положимъ не дойдетъ, тогда эта сумма будетъ заключаться при безконечно-большомъ n между a и b_1. Раздѣлимъ промежутокъ AB_1 пополамъ въ точкѣ A_1 и пусть

$$OA_1 = a_1 = \frac{a+b_1}{2}$$

S_n измѣняясь опять или не дойдетъ до a_1 или перейдетъ, положимъ перейдетъ, значитъ S_n будетъ заключаться между $OA_1 = a_1$ и $OB_1 = b_1$. Продолжая поступать такимъ образомъ далѣе, мы найдемъ рядъ паръ величинъ такихъ, что S_n больше одной изъ величинъ каждой пары a_k и меньше другой b_k, при этомъ каждая изъ величинъ a_k меньше любой изъ величинъ b_k, по мѣрѣ увеличенія значка k величины a_k идутъ возрастая, величины b_k убывая и разность между величинами одной и той-же пары неопредѣленно уменьшается, ибо для всякой пары эта разность есть половина предыдущей разности, такіе два ряда величинъ, какъ извѣстно, опредѣляютъ собою одно число S, которое есть общій предѣлъ какъ чиселъ a_k, такъ и чиселъ b_k, слѣдовательно S_n по мѣрѣ увеличенія значка n имѣетъ предѣломъ это число S, и слѣдовательно разсматриваемый рядъ сходящійся.

Слѣдствіе. *Если рядъ съ положительными членами расходящійся, то сумма S_n при безконечно-большомъ n будетъ сама безконечно-большая.*

Въ самомъ дѣлѣ допустивъ противное, т. е. что S_n не безконечно-большая, значитъ не превосходитъ нѣкотораго конечнаго числа b, мы по предыдущей теоремѣ заключимъ, что нашъ рядъ сходящійся, что противорѣчитъ предположенію, значитъ S_n превзойдетъ всякое напередъ заданное число т. е. S_n есть величина безконечно-большая.

Мы будемъ писать для такого ряда $S = \infty$ и говорить, что сумма расходящагося ряда съ положительными членами есть безконечность.

Примѣръ. Пусть данъ рядъ

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \ldots + \frac{1}{n^k} + \ldots$$

показать, что этотъ рядъ сходящійся когда $k > 1$, и расходящійся при $k \leq 1$.

Положимъ сперва, что число $k > 1$ и напишемъ нашъ рядъ такъ:

$$S = 1 + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right) + \left(\frac{1}{4^k} + \ldots + \frac{1}{7^k}\right) + \\ + \left(\frac{1}{8^k} + \ldots + \frac{1}{15^k}\right) + \ldots$$

Въ каждой изъ скобокъ первый членъ есть наибольшій, а число членовъ въ первыхъ скобкахъ 2, во-вторыхъ 4, въ третьихъ 8 и т. д. то очевидно будетъ:

$$S < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^k} + 4 \cdot \frac{1}{4^k} + 8 \cdot \frac{1}{8^k} + \ldots$$

или

$$S < 1 + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{4^{k-1}} + \frac{1}{8^{k-1}} + \ldots$$

или иначе:

$$S < 1 + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{(2^{k-1})^2} + \frac{1}{(2^{k-1})^3} + \ldots$$

такъ какъ по предположенію $k > 1$, то величина $\frac{1}{2^{k-1}} < 1$ и значитъ рядъ второй части предыдущаго неравенства представляетъ собою безконечно убывающую геометрическую прогрессію знаменатель которой $q = \frac{1}{2^{k-1}}$, а такъ какъ предѣлъ суммы безконечно-убывающей прогрессіи

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$$

есть $\frac{1}{1-q}$, то въ нашемъ случаѣ будетъ:

$$S < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{k-1}}} = \frac{2^{k-1}}{2^{k-1} - 1}$$

т. е. сумма S предложеннаго ряда не превосходитъ нѣкотораго *конечнаго* числа, т. е. рядъ сходящійся.

Выше (§ 44) уже было показано, что при $k = 1$ рядъ расходящійся, такъ какъ сумма первыхъ членовъ его возрастаетъ безпредѣльно при возрастаніи числа взятыхъ членовъ.

Когда же $k < 1$, то очевидно, что будетъ

$$\frac{1}{2^k} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^k} > \frac{1}{3}$$

. . . . .

$$\frac{1}{n^k} > \frac{1}{n}$$

. . . . .

и слѣдовательно рядъ и подавно будетъ расходящійся.

§ 48. Изъ доказанной въ предыдущемъ § теоремы вытекаютъ слѣдующія очевидныя слѣдствія:

1) *Если каждый членъ ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 \ldots + u_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

съ положительными членами менѣе соотвѣтствующаго ему члена другого такого-же ряда

$$v_1 + v_2 + v_3 \ldots + v_n . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

такъ что вообще $u_n < v_n$ то если второй рядъ сходящійся, то и первый сходящійся.

2) *Если будетъ постоянно $u_n > v_n$ и второй рядъ расходящійся, то и первый расходящійся.*

§ 49. Эти два предложенія даютъ множество различныхъ признаковъ сходимости, которые получаются сравнивая, данный рядъ (1) съ другимъ (2) выбираемымъ, такъ чтобы его сходимость или расходимость были извѣстны

Такъ напримѣръ, возьмемъ для сравненія съ рядомъ (1) безконечно-убывающую геометрическую прогрессію, знаменатель которой α. Положимъ, что для всѣхъ значковъ начиная съ $n = p$ и до ∞ будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha < 1$$

т. е. что отношеніе всякаго послѣдующаго члена къ ему предшествующему остается меньше нѣкотораго постояннаго числа α меньшаго 1, то рядъ сходящійся. Въ самомъ дѣлѣ имѣемъ:

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} < \alpha \quad \text{слѣдовательно} \quad u_{p+1} < u_p \cdot \alpha$$

$$\frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} < \alpha \quad » \quad u_{p+2} < u_{p+1} \cdot \alpha < u_p \alpha^2$$

$$\frac{u_{p+3}}{u_{p+2}} < \alpha \quad » \quad u_{p+3} < u_{p+2} \cdot \alpha < u_p \alpha^3$$

. . . .

сложивъ вторыя изъ этихъ неравенствъ получимъ:

$$r_p = u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots < \alpha u_p (1 + \alpha + \alpha^2 \ldots)$$

т. е.

$$r_p < \alpha u_p \cdot \frac{1}{1-\alpha}.$$

Такъ какъ вообще сумма ряда

$$S = S_p + r_p$$

а по вышедоказанному

$$r_p < u_p \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

то будетъ

$$S < S_p + u_p \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

т. е. сумма ряда не превзойдетъ нѣкотораго конечнаго числа— значитъ рядъ сходящійся.

Такимъ образомъ имѣемъ слѣдующую теорему: *если въ рядъ съ положительными членами:*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

начиная съ нѣкотораго значка p и для всѣхъ за нимъ слѣдующихъ отношеніе всякаго члена къ предшествующему ему

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha < 1,$$

гдѣ α есть величина независящая отъ n и меньшая 1, то рядъ сходящійся.

Не трудно видѣть, что если начиная съ нѣкотораго значка p упомянутое въ предыдущей теоремѣ отношеніе будетъ оставаться независимо отъ n постоянно большимъ или равнымъ 1, то рядъ *расходящійся*, ибо въ этомъ случаѣ общій его членъ не имѣлъ бы своимъ предѣломъ O.

Чтобы пользоваться этимъ признакомъ сходимости обыкновенно ищутъ предѣлъ отношенія $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ при $n = \infty$. Если этотъ предѣлъ, который мы обозначимъ черезъ λ, окажется не равнымъ 1, то рядъ сходящійся когда $\lambda < 1$ и расходящійся когда $\lambda > 1$. Дѣйствительно если λ не равно 1 то можно будетъ взять какое-нибудь число α, заключающееся между λ и 1, ему найдется соотвѣтствующее p, начиная съ котораго отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ будетъ оставаться меньше α въ первомъ случаѣ и больше α во второмъ и доказанная теорема можетъ быть примѣнена.

Сомнительный случай произойдетъ тогда, когда отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ остается при безконечно большомъ n меньше 1, но приближается къ 1 какъ угодно близко т. е. когда предѣлъ этого отношенія равенъ 1. Въ самомъ дѣлѣ, тогда между 1 и этимъ отношеніемъ нельзя поставить никакого числа α, и разсужденія, которыми пользовались при доказательствѣ теоремы, не будутъ имѣть мѣста.

Такой сомнительный случай будетъ напр. для ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

ибо

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

При n безконечно большомъ это отношеніе хотя и меньше 1, но безконечно близко къ 1, и по предыдущей теоремѣ мы не можемъ судить объ этомъ рядѣ. Уже было показано, что этотъ рядъ расходящійся.

Для ряда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

отношеніе

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

также имѣетъ своимъ предѣломъ 1, между тѣмъ мы видѣли, что этотъ рядъ сходящійся (§ 47).

§ 50. Сличеніе даннаго ряда съ геометрической прогрессіей можетъ быть произведено и иначе и приводитъ къ слѣдующему признаку сходимости:

Рядъ съ положительными членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

сходящійся, если корень $n^{\text{ой}}$ степени изъ члена u_n т. е. $\sqrt[n]{u_n}$, начиная съ нѣкотораго значенія n остается меньше постояннаго числа α меньшаго единицы, и расходящійся, если указанный корень, начиная съ нѣкотораго значенія n, остается больше 1.

Въ самомъ дѣлѣ пусть, начиная со значенія $n = p$ имѣетъ мѣсто неравенство

$$\sqrt[n]{u_n} < \alpha < 1$$

такъ что

$$\sqrt[p]{u_p} < \alpha, \quad \sqrt[p+1]{u_{p+1}} < \alpha \ldots \text{ и т. д.}$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$u_p < \alpha^p, \quad u_{p+1} < \alpha^{p+1} \ldots \text{ и т. д.}$$

т. е. начиная съ члена u_p всѣ дальнѣйшіе члены ряда меньше соотвѣтствующихъ членовъ безконечно убывающей (ибо $\alpha < 1$) геометрической прогрессіи:

$$\alpha^p + \alpha^{p+1} + \alpha^{p+2} + \ldots$$

значитъ предложенный рядъ сходящійся.

Въ томъ-же случаѣ когда $\sqrt[n]{u_n}$ начиная съ $n = p$ остается больше 1, то ясно, что и общій членъ u_n будетъ оставаться больше 1 и предѣлъ его не можетъ стремиться къ нулю, что, какъ показано выше (§ 46), есть необходимое условіе сходимости всякаго ряда, значитъ въ этомъ случаѣ предложенный рядъ будетъ расходящимся.

Ряды знакоперемѣнные, сходимость ихъ.

§ 51. Укажемъ теперь простѣйшій признакъ сходимости рядовъ знакоперемѣнныхъ, т. е. такихъ, члены которыхъ поперемѣнно положительные и отрицательные.

Такой рядъ можетъ быть написанъ въ видѣ:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n \ldots$$

гдѣ всѣ u суть числа положительныя.

Чтобы такой рядъ былъ сходящимся, **необходимо**, *какъ и вообще для всякаго ряда, чтобы общій членъ его u_n стремился къ нулю при возрастаніи значка n, и при этомъ* **достаточно**, *чтобы, начиная съ нѣкотораго значенія n, члены ряда шли убывая, т. е. каждый послѣдующій членъ по численной величинѣ былъ меньше предшествующаго.*

Чтобы убѣдиться въ вышесказанномъ, стоитъ только разсмотрѣть остатокъ ряда.

Этотъ остатокъ будетъ:

$$r_n = (-1)^n \{u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \ldots\}$$

Сумма-же первыхъ n членовъ ряда будетъ

$$S_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n.$$

Положимъ, что начиная съ члена u_p рядъ убывающій и что n взято $\geq p$. Тогда легко видѣть, что остатокъ ряда будетъ имѣть тотъ-же знакъ какъ $(-1)^n u_{n+1}$, т. е. какъ первый изъ его членовъ и по численной величинѣ будетъ меньше u_{n+1}. Въ самомъ дѣлѣ величина стоящая въ $\{\ \}$ положительная, что видно, написавъ ее такъ:

$$(u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + (u_{n+5} - u_{n+6}) + \ldots$$

ибо каждая разность положительная. Вмѣстѣ съ тѣмъ эта сумма меньше u_{n+1}, въ чемъ убѣдимся, написавъ ее такъ:

$$u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - (u_{n+6} - u_{n+7}) + \ldots$$

причемъ опять каждая разность въ скобкахъ положительная. Такимъ образомъ мы видимъ что: *въ убывающемъ рядѣ*

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n \ldots$$

остатокъ

$$r_n = (-1)^n \{u_{n+1} - u_{n+2} \ldots\}$$

будетъ одного знака съ членомъ, который слѣдуетъ за $(-1)^{n+1} u_n$ *на коемъ остановились въ суммѣ и по численной величинѣ меньше этого слѣдующаго члена.*

При доказательствѣ этой теоремы мы пользовались лишь тѣмъ предположеніемъ, что рядъ убывающій, если-же мы пред-

положимъ теперь, что пред $u_n = 0$, то будетъ очевидно и пред. $r_n = 0$, ибо r_n меньше u_{n+1} по численной величинѣ, а слѣдовательно рядъ будетъ сходящійся. Такимъ образомъ имѣемъ слѣдующую теорему:

Теорема. *Для сходимости знакоперемѣннаго ряда необходимо и достаточно во 1-хъ, чтобы общій членъ его при неопредѣленномъ увеличеніи значка стремился къ нулю и во 2-хъ чтобы, начиная съ нѣкотораго члена, рядъ былъ убывающій, т. е. каждый послѣдующій членъ былъ бы по численной величинѣ меньше предыдущаго.*

Такъ напримѣръ рядъ:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \ldots$$

сходящійся.

Рядъ-же

$$\frac{1}{\sqrt{2-1}} - \frac{1}{\sqrt{2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3+1}} - \frac{1}{\sqrt{3-1}} + \frac{1}{\sqrt{4-1}} - \frac{1}{\sqrt{4+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots$$

коего общій членъ хотя и стремится къ нулю, но который не есть рядъ убывающій, ибо по численной величинѣ послѣдующій членъ напр. $\frac{1}{\sqrt{k-1}}$ больше нежели ему предшествующій $\frac{1}{\sqrt{(k-1)+1}}$, есть рядъ этотъ расходящійся. Дѣйствительно сумма его первыхъ $2n$ членовъ есть:

$$S_{2n} = 2\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right]$$

которая при неопредѣленномъ возрастаніи n растетъ до ∞.

§ 52. Въ общемъ случаѣ въ рядѣ знаки членовъ могутъ чередоваться и иначе, чѣмъ было указано въ § 51, тогда такой

Ряды съ мнимыми членами. Абсолютная сходимость.

рядъ сличаютъ съ другимъ рядомъ, который получается изъ даннаго взявъ всѣ члены, его лишь по *численной* ихъ величинѣ и приписывая имъ одинъ и тотъ-же знакъ напр. $+$. Если этотъ второй рядъ окажется сходящимся, то очевидно, что и первый будетъ сходящимся и притомъ какъ бы въ немъ ни чередовались знаки членовъ. *Рядъ обладающій тѣмъ свойствомъ, что онъ остается сходящимся, когда всѣ его члены взяты по численной величинѣ и съ однимъ и тѣмъ-же знакомъ называется* **абсолютно** *сходящимся.*

Наконецъ могутъ быть такіе случаи, что члены ряда мнимые, т. е. вида $a+b\sqrt{-1}$.

Какъ извѣстно всякое выраженіе такого вида можетъ быть представлено въ видѣ

$$\rho\,(\mathrm{Cos}\,\theta+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\theta)$$

причемъ

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2}\quad\text{и}\quad \mathrm{tg}\,\theta=\frac{b}{a}.$$

Изслѣдованіе рядовъ съ мнимыми членами имѣетъ большое значеніе въ анализѣ, поэтому мы приведемъ простѣйшія ихъ свойства.

Если въ рядѣ

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n\ldots\qquad(1)$$

члены мнимые, то этотъ рядъ называется сходящимся, когда ихъ дѣйствительныя части въ отдѣльности представляютъ рядъ сходящійся и точно также коэффиціенты при $\sqrt{-1}$ *даютъ сходящійся рядъ.*

Если положить что

$$u_n=\rho_n(\mathrm{Cos}\,\theta_n+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\theta_n)$$

то по высказанному опредѣленію рядъ (1) будетъ сходящійся, когда каждый изъ двухъ слѣдующихъ рядовъ сходящійся:

$$\left.\begin{array}{l}\rho_1 \operatorname{Cos}\theta_1 + \rho_2 \operatorname{Cos}\theta_2 + \rho_3 \operatorname{Cos}\theta_3 + \ldots + \rho_n \operatorname{Cos}\theta_n + \\ \rho_1 \operatorname{Sin}\theta_1 + \rho_2 \operatorname{Sin}\theta_2 + \rho_3 \operatorname{Sin}\theta_3 + \ldots + \rho_n \operatorname{Sin}\theta_n + \end{array}\right\} \quad . \quad (2)$$

Если вышеуказанныя условія не выполнены, то рядъ (1) называется расходящимся.

Для сходимости рядовъ (2) *достаточно*, чтобы рядъ модулей, его членовъ т. е.

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_n + \ldots$$

былъ сходящійся, ибо очевидно, что по численной величинѣ каждая изъ суммъ (2) не больше суммы:

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_n \ldots$$

и значитъ, когда эта послѣдняя сумма конечная, то вышеуказанныя двѣ и подавно конечныя.

Такой рядъ, для котораго и рядъ модулей сходящійся, называется также *абсолютно* сходящимся.

§ 53. При изученіи функцій имѣютъ важное значеніе ряды, общій членъ которыхъ имѣетъ видъ

$$u_n = a_n z^n$$

причемъ a_n есть нѣкоторый численный коэффиціентъ, зависящій отъ n. Буква-же z представляетъ собою перемѣнную независимую.

Для общности разсужденій будемъ предполагать, что перемѣнная z можетъ принимать не только вещественныя но и мнимыя значенія, въ каковомъ случаѣ и коэффиціенты a_n могутъ быть также, какъ вещественные, такъ и мнимые.

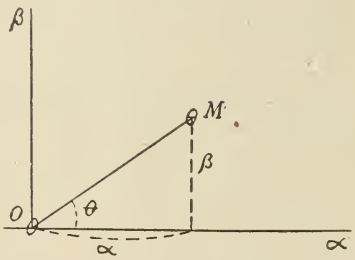
Извѣстно что мнимое значеніе перемѣнной z

$$z = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

можетъ быть представлено на плоскости точкою M, коей координаты суть α и β (черт. 12), тогда длина $OM = \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ представляетъ модуль z, а уголъ $xOM = \theta$ — аргументъ и

$$z = \alpha + \beta\sqrt{-1} = \rho\,(\mathrm{Cos}\,\theta + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\theta).$$

Черт. 12.



Изъ такого графическаго представленія понятенъ смыслъ выраженія «z заключенное внутри или внѣ данной области», это значитъ, что точка представляющая z, лежитъ внутри или внѣ данной на плоскости области.

Ряды, расположенные, по цѣлымъ степенямъ перемѣнной.

§ 54. Одно изъ важнѣйшихъ свойствъ рядовъ разсматриваемаго вида выражается слѣдующей теоремой:

Если модули всѣхъ членовъ ряда

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

остаются конечными при такомъ значеніи z, модуль котораго равенъ R, то этотъ рядъ абсолютно сходящійся при всякомъ z модуль коего ρ меньше R.

Въ самомъ дѣлѣ пусть A_0, A_1, ... A_n . . . . суть модули коэффиціентовъ нашего ряда, тогда если модуль z есть R, то модули членовъ ряда будутъ:

$$A_0,\ A_1 R,\ A_2 R^2 \ldots . A_n R^n . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

и такъ какъ по предположенію всѣ эти числа *конечныя*, то можно взять такое число M, которое будетъ больше каждаго изъ чиселъ (*).

Если взять z такимъ, что $modz = \rho$, то рядъ модулей будетъ:

$$A_0 + A_1\rho + A_2\rho^2 + A_3\rho^3 \ldots\ldots + A_n\rho^n + \ldots\ldots$$

что можно написать такъ:

$$A_0 + A_1 R\left(\frac{\rho}{R}\right) + A_2 R^2\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 + \ldots\ldots + A_n R^n\left(\frac{\rho}{R}\right)^n + \ldots \quad (**)$$

а такъ какъ мы видѣли, что число M больше любого изъ чиселъ $A_n R^n$, то сличая рядъ (**) съ геометрической прогрессіей:

$$M + M\left(\frac{\rho}{R}\right) + M\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 + \ldots\ldots + M\left(\frac{\rho}{R}\right)^n + \ldots\ldots$$

мы видимъ что каждый членъ ряда меньше соотвѣтствующаго члена прогрессіи, значитъ рядъ *сходящійся*, такъ какъ эта прогрессія безконечно убывающая, ибо $\rho < R$ и слѣдовательно знаменатель прогрессіи $\frac{\rho}{R} < 1$.

Составимъ теперь выраженіе остатка ряда (**). Этотъ остатокъ будетъ:

$$r_n = A_{n+1}\rho^{n+1} + A_{n+2}\rho^{n+2} + \ldots\ldots$$
$$= A_{n+1}R^{n+1}\cdot\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+1} + A_{n+2}R^{n+2}\cdot\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+1} + \ldots\ldots$$

слѣдовательно

$$r_n < M\left|\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+1} + \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+1} + \ldots\ldots\right|$$

или

$$r_n < M\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+1}\left|1 + \frac{\rho}{R} + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 + \ldots\ldots\right|$$

Положимъ, что отношеніе $\frac{\rho}{R} = q < 1$ тогда будетъ:

$$r_n < M\cdot q^n\cdot\frac{1}{1-q} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

такимъ образомъ для нашего ряда можно судить о величинѣ, которой не превзойдетъ погрѣшность, какую мы сдѣлаемъ, принявъ за сумму ряда сумму первыхъ его n членовъ.

Болѣе того, для этого ряда можно указать какое число членовъ надо взять, чтобы упомянутая погрѣшность была меньше какой нибудь напередъ назначенной величины ε.

Такъ какъ отношеніе $q = \frac{\rho}{R}$ меньше 1, то возьмемъ такое число p которое было-бы меньше 1 но больше q, т. е.

$$1 > p > q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Изъ формулы (1) слѣдуетъ, что, опредѣливъ n такъ, чтобы было

$$M p^n \cdot \frac{1}{1-p} \leqq \varepsilon, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

то остатокъ r_n будетъ меньше ε.

Изъ уравненія (3) слѣдуетъ:

$$n \log p \geqq \log \varepsilon + \log (1-p) - \log M$$

откуда

$$n \geqq \frac{\log \varepsilon + \log (1-p) - \log M}{\log p}$$

обозначивъ величину

$$\frac{\log \varepsilon + \log (1-p) - \log M}{\log p}$$

черезъ N, видимъ что стоитъ только въ нашемъ ряду брать N или больше членовъ и погрѣшность суммы не превзойдетъ назначенной величины ε, и притомъ какое-бы ни было значеніе ρ лишь-бы только отношеніе $\frac{\rho}{R}$ было не больше p.

Такимъ образомъ разсматриваемый рядъ не только сходящійся пока $\rho < R$, но обладаетъ еще тѣмъ свойствомъ, что *независимо* отъ величины ρ можно указать какое число чле-

новъ надо брать, чтобы остатокъ ряда былъ *меньше* напередъ назначенной величины.

Это свойство называется *равномѣрною* сходимостью ряда.

Кругъ и радіусъ сходимости.

§ 55. Очевидно что рядъ

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

при $z = 0$ сходящійся. Если мы начнемъ увеличивать модуль перемѣнной z, то вообще можемъ встрѣтить слѣдующіе три случая:

1) модули членовъ остаются конечными при всякомъ n пока модуль z равный ρ не превзойдетъ нѣкоторой величины $\rho = R$, послѣ чего возрастаютъ безпредѣльно съ увеличеніемъ n.

2) модули членовъ остаются конечными при всякомъ n и при всякомъ ρ сколь-бы оно велико ни было.

3) модули членовъ возрастаютъ безпредѣльно вмѣстѣ съ n сколь-бы малое значеніе ρ ни взять.

Ясно, что всѣ, точки представляющія такія величины z, модули которыхъ $\rho < R$, лежатъ внутри круга, описаннаго изъ начала координатъ, какъ изъ центра радіусомъ R.

Этотъ кругъ называется *кругомъ сходимости* для даннаго ряда въ случаѣ 1-мъ.

Въ случаѣ 2-мъ очевидно, что точки, представляющія z, можно брать на плоскости гдѣ угодно — рядъ остается сходящимся, тогда говорятъ: его кругъ или радіусъ сходимости безконечно-большой.

Наконецъ, въ случаѣ 3-мъ говорятъ, что радіусъ сходимости равенъ нулю.

Такъ напримѣръ для ряда:

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots \pm \frac{z^n}{n} \pm \ldots$$

радіусъ сходимости $R = 1$.

Для ряда

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{z^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} + \ldots$$

радіусъ сходимости безконечно-большой и наконецъ для ряда:

$$1 + z + 1\cdot 2\cdot z^2 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot z^3 + \ldots + 1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot z^n + \ldots$$

радіусъ сходимости равенъ 0.

Такимъ образомъ въ силу доказаннаго въ § 54 и сдѣланныхъ выше опредѣленій мы можемъ высказать такую теорему:

Для всякаго ряда вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

расположеннаго по возрастающимъ степенямъ перемѣнной z существуетъ такой кругъ радіуса R, что для всякой точки, внутри него находящейся рядъ остается абсолютно и равномѣрно сходящимся.

Въ частныхъ случаяхъ радіусъ сходимости R можетъ быть равенъ какъ ∞ такъ и 0.

Чтобы для даннаго ряда найти радіусъ сходимости, можно, или взять выраженіе модуля общаго его члена $A_n \rho^n$ и искать наибольшее значеніе ρ, при которомъ $A_n \rho^n$ остается конечнымъ при неопредѣленномъ возрастаніи n; или-же можно, составивъ рядъ модулей, примѣнить къ нему доказанныя въ § 50 теоремы о сходимости рядовъ съ положительными членами и искать наименьшее значеніе ρ, при которомъ рядъ становится расходящимися.

Опредѣленіе радіуса сходимости въ простѣйшихъ случаяхъ.

§ 56. При этомъ полезно имѣть въ виду слѣдующее замѣчаніе: *предѣлъ выраженія $n^k \rho^n$, гдѣ k какое угодно положительное число и ρ положительное число меньшее 1 при неопредѣленномъ возрастаніи n равенъ нулю.*

Въ самомъ дѣлѣ такъ какъ $\rho < 1$ то можно найти такое положительное число λ чтобы было $\rho = \frac{1}{1+\lambda}$, тогда предложенное выраженіе приметъ видъ:

$$n^k \rho^n = \frac{n^k}{(1+\lambda)^n}$$

Въ нашемъ случаѣ n всегда будетъ числомъ цѣлымъ, k можетъ быть какое угодно. Положимъ сперва, что оно цѣлое.

Примѣняя формулу бинома Ньютона имѣемъ:

$$\frac{n^k}{(1+\lambda)^n} =$$

$$= \frac{n^k}{1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\lambda^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k-1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot k}\lambda^k+\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{1\cdot 2\cdots(k+1)}\lambda^{k+1}+\cdots}$$

Раздѣливъ числителя и знаменателя дроби стоящей во второй части на n^k, получимъ новую равную ей дробь, у которой числитель есть 1 знаменатель-же есть

$$\frac{(1+\lambda)^n}{n^k} = \frac{1}{n^k}+\frac{\lambda}{n^{k-1}}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\lambda^2}{n^{k-2}}+\cdots+$$

$$+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{1\cdot 2\cdots k}\lambda^k+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{1\cdot 2\cdots k\,(k+1)}(n-k)\lambda^{k+1}+\cdots$$

Какъ видно при неопредѣленномъ возрастаніи n всѣ первыя k слагаемыхъ знаменателя а именно:

$$\frac{1}{n^k}:\ \frac{\lambda}{n^{k-1}},\ \frac{1-\frac{1}{n}}{1\cdot 2}\cdot\frac{\lambda^2}{n^{k-2}}\cdots$$

приближаются къ нулю.

Членъ

$$\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{1\cdot 2\cdots k}\lambda^k$$

приближается къ

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdots k} \lambda^k$$

всѣ же остальные члены имѣютъ множители такіе какъ $(n-k)$; $(n-k-1) \ldots$, которые неопредѣленно возрастаютъ вмѣстѣ съ n. Значитъ, и весь знаменатель неопредѣленно возрастаетъ и дробь $\frac{n^k}{(1+\lambda)^n}$ имѣетъ своимъ предѣломъ 0.

Если k число дробное, то всегда найдутся два такихъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа $p-1$ и p, между которыми k заключается, такъ что будетъ:

$$p - 1 < k < p,$$

слѣдовательно

$$n^{p-1} < n^k < n^p$$

и

$$\frac{n^k}{(1+\lambda)^n} < \frac{n^p}{(1+\lambda)^n}.$$

По выше доказанному:

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \frac{n^p}{(1+\lambda)^n} = 0;$$

значитъ и

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \frac{n^k}{(1+\lambda)^n} = 0.$$

Изъ выше доказаннаго ясно, что если $\rho > 1$, то при неопредѣленномъ возрастаніи n выраженіе $\frac{\rho^n}{n^k}$ также неопредѣленно возрастаетъ, *каково* бы ни было *конечное* число k.

На основаніи этого замѣчанія сей-часъ же видно, что для рядовъ:

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \cdots$$

$$1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1} + \cdots$$

$$2 + 3 \cdot 2z + 4 \cdot 3z^2 + \cdots + n(n-1) \cdot z^{n-2} + \cdots$$

. . . . . .

радіусъ сходимости есть 1, т. е. что эти ряды остаются сходящимися для всякаго z, модуль коего меньше 1.

Точно также для рядовъ:

$$\frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \cdot \cdot \cdot \cdot \pm \frac{z^n}{n}$$

$$\frac{z}{1\cdot 2} + \frac{z^2}{2\cdot 3} + \frac{z^3}{3\cdot 4} \cdot \cdot \cdot \cdot + \frac{z^n}{n\cdot(n+1)}$$

и т. п. радіусъ сходимости есть также 1.

Производные ряды.

§ 57. Очевидно, что рядъ

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdot \cdot \cdot \cdot + a_n z^n + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

для всякаго значенія z какъ вещественнаго, такъ и мнимаго, взятаго внутри круга сходимости (если мы хотимъ ограничиваться только вещественными значеніями z, то стоитъ ихъ только брать на оси x-овъ между $-R$ и $+R$, гдѣ R радіусъ сходимости) представляетъ собою нѣкоторую функцію этой перемѣнной, ибо всякому частному значенію z соотвѣтствуетъ одно вполнѣ опредѣленное значеніе суммы ряда.

Итакъ пусть будетъ:

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdot \cdot \cdot \cdot + a_n z^n + \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

Положимъ, что z принимаетъ только вещественныя значенія; составимъ такой рядъ, котораго члены равнялись бы соотвѣтственно производнымъ членовъ перваго ряда, т. е. возьмемъ рядъ:

$$a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdot \cdot \cdot \cdot + n a_n z^{n-1} + \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$$

Докажемъ, *что радіусъ сходимости этого ряда тотъ-же самый R, какъ и для предложеннаго ряда* (1).

Въ самомъ дѣлѣ, если рядъ (1) имѣетъ радіусъ сходимости R, то существуетъ такое конечное число M, что

$$A_n R^n \leq M$$

гдѣ A_n есть модуль коэффиціента a_n.

Отсюда слѣдуетъ

$$A_n \leq \frac{M}{R^n}$$

Составимъ рядъ модулей для ряда (2) онъ очевидно будетъ:

$$A_1 + 2A_2\rho + 3A_3\rho^2 + \ldots + nA_n\rho^{n-1} + \quad . \quad (3)$$

и сумма этого ряда не больше суммы

$$\frac{M}{R}\left[1 + 2\frac{\rho}{R} + 3\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 + 4\left(\frac{\rho}{R}\right)^3 + \ldots + n\left(\frac{\rho}{R}\right)^n + \ldots\right]$$

а такъ какъ рядъ, стоящій въ [ ] сходящійся, когда отношеніе $\frac{\rho}{R} < 1$, въ чемъ убѣдимся взявъ предѣлъ отношенія двухъ послѣдовательныхъ его членовъ, то значитъ и рядъ (3) сходящійся при всякомъ

$$\rho < R$$

Если-же взять $\rho > R$ то величина $A_n\rho^n$ будетъ неопредѣленно возрастать вмѣстѣ съ n; очевидно, что $nA_n\rho^{n-1}$ будетъ также неопредѣленно возрастать и рядъ (3) будетъ расходящимися.

Такимъ образомъ величина R представитъ собою радіусъ сходимости для ряда (2).

Ясно, что если составить рядъ

$$2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3 z + 4\cdot 3a_4 z^2 + \ldots + n(n-1)a_n z^{n-1} + \ldots \quad (3),$$

члены котораго суть производныя соотвѣтствующихъ членовъ ряда (2), иначе вторыя производныя членовъ ряда (1), то и

этотъ рядъ имѣетъ тотъ-же самый кругъ сходимости радіуса R. Не трудно видѣть, что это будетъ имѣть мѣсто и для ряда составленнаго изъ производныхъ любаго порядка.

§ 58. Составленные такимъ образомъ по данному ряду (1) производные ряды, представляютъ собою новыя функціи той-же перемѣнной z. Спрашивается, въ какомъ соотношеніи эти функціи будутъ къ первоначальной функціи $F(z)$ и представляютъ ли онѣ собою производныя этой функціи?

Утверждать этого безъ доказательства нельзя, ибо теорема, о томъ что производная суммы равняется суммѣ производныхъ слагаемыхъ, здѣсь примѣнена быть не можетъ, такъ какъ эта теорема была доказана для *конечнаго* числа слагаемыхъ, въ нашемъ-же случаѣ число слагаемыхъ безконечно-большое. Мы приведемъ безъ доказательства слѣдующую теорему:

Функція $f(z)$ опредѣляемая рядомъ

$$f(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots + n a_n z^{n-1} + \ldots$$

члены котораго суть соотвѣтственно производныя членовъ ряда:

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

представляетъ собою производную функціи $F(z)$ опредѣляемой этимъ послѣднимъ, когда z взято въ промежуткѣ $-R < z < R$, гдѣ R есть радіусъ сходимости этихъ рядовъ.

Эта теорема показываетъ, что производная функціи $F(z)$, опредѣляемой рядомъ, расположеннымъ по степенямъ перемѣнной независимой, находится совершенно также, какъ если-бы число членовъ ряда было конечное.

ГЛАВА VII.

Рядъ Тейлора и рядъ Маклорена.

Разложеніе въ рядъ приращенія цѣлой функціи.

§ 59. На основаніи опредѣленія производной отъ данной функціи $f(x)$, мы имѣли слѣдующее соотношеніе:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

причемъ ε есть безконечно-малая величина одновременно съ h.

Изъ этого соотношенія слѣдуетъ такое

$$f(x+h) - f(x) = h \cdot f'(x) + \varepsilon \cdot h \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

которое показываетъ, что приращеніе функціи, кромѣ члена $h \cdot f'(x)$, пропорціональнаго приращенію перемѣнной независимой содержитъ еще другіе члены, которые по отношенію къ h порядка выше перваго, и которые всѣ включены въ неопредѣленное количество ε.

Спрашивается, нельзя ли приращеніе функціи представить въ болѣе подробномъ видѣ?

Возьмемъ сперва простѣйшую изъ функцій, именно цѣлую и составимъ полное выраженіе ея приращенія.

Пусть будетъ

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \quad . \quad (3)$$

такая функція.

Приращенное ея значеніе будетъ

$$F(x+h) = a_0 (x+h)^n + a_1 (x+h)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x+h) + a_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Такъ какъ показатель n есть число цѣлое, то каждую изъ степеней двучленовъ мы можемъ разложить по биному и будетъ:

$$(x+h)^n = x^n + n x^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2} h^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^{n-1}\cdot h^3 + \ldots + h^n$$

$$(x+h)^{n-1} = x^{n-1} + (n-1)\, x^{n-2}\cdot h + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} x^{n-3}\cdot h^2 +$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3} x^{n-4}\cdot h^3 + \ldots + h^{n-1}$$

. . . . . .

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

Подставляя эти величины въ равенство (4) и собирая члены: несодержащіе h, члены содержащіе h въ первой степени, члены содержащія h во второй степени, и т. д. и замѣчая, что во всѣхъ членахъ содержащихъ h^2, кромѣ послѣдняго, входятъ въ знаменателѣ множители $1\cdot 2$; въ членахъ съ h^3 множители $1\cdot 2\cdot 3$ и т. д. мы получимъ:

$$F(x+h) =$$

$a_0 x^n$	$+ n a_0 x^{n-1}$	h $+ n(n-1) a_0 x^{n-2}$	$\frac{h^2}{1\cdot 2} + \ldots + a_0 h^n.$
$a_1 x^{n-1}$	$+ (n-1) a_1 x^{n-2}$	$+ (n-1)(n-2) a_1 x^{n-3}$	
$a_2 x^{n-2}$	$+ (n-2) a_2 x^{n-3}$	$+ (n-2)(n-3) a_2 x^{n-4}$	
. . .	. . . . .	. . . . .	
. . .	. . . . .	. . . . .	
$a_{n-2} x^2$	$+ 2 a_{n-2} x$	$+ 2 a_{n-2}$	
$a_{n-1} x$	$+ a_{n-1}$		
a_n			

Вычитая изъ этого равенства величину $F(x)$, мы получимъ выраженіе такого вида:

$$F(x+h)-F(x)=P_1\cdot h+P_2\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2}+P_3\cdot\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+a_0h^n$$

гдѣ P_1, P_2, P_3 .... суть нѣкоторыя функціи, отъ перемѣнной x.

Обративъ вниманіе на видъ этихъ функцій мы замѣтимъ, что

$$P_1=F'(x);\ P_2=F''(x);\ P_3=F'''(x)\ \ldots\ .$$

а такъ какъ

$$F^{(n)}(x)=n(n-1)\ \ldots\ .\ 1\cdot a_0$$

то формулу (5) можно написать въ такомъ видѣ:

$$F(x+h)-F(x)=hF'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}F''(x)+\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot F'''(x)+$$

$$\ldots\ .+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}\cdot F^{(n)}(x)\qquad(6).$$

Такимъ образомъ для всякой цѣлой функціи приращеніе функціи разлагается по *цѣлымъ* степенямъ приращенія перемѣнной независимой.

Разложеніе въ рядъ приращенія всякой функціи.

§ 60. Естественно и для всякой функціи искать разложеніе такого-же вида, т. е. *по цѣлымъ и возрастающимъ* степенямъ приращенія h перемѣнной независимой.

И такъ положимъ

$$f(x+h)-f(x)=Q_1\cdot h+Q_2h^2+Q_3h^3+\ldots.+Q_nh^n+\ldots(7)$$

и будемъ искать выраженіе коэффиціентовъ Q_1, Q_2, Q_3 и т. д.

Чтобы найти эти выраженія будемъ разсматривать обѣ части равенства (7) какъ функціи отъ буквы h; полагая

$f(x+h)=\varphi(h)$ и обозначая $f(x)$ черезъ Q_0, мы можемъ предыдущее равенство написать въ такомъ видѣ

$$\varphi(h)=f(x+h)=Q_0+Q_1h+Q_2h^2+Q_3h^3+\ldots+Q_nh^n+\ldots \quad (7)$$

чтобы опредѣлить Q_1, Q_2 . . . . возьмемъ отъ обѣихъ частей равенства (7) послѣдовательныя производныя **по буквѣ h** т. е. считая x, а слѣдовательно и Q_0, Q_1 . . . . которыя буквы h не содержатъ, за постоянныя.

Тогда получимъ:

$$\varphi'(h)=f'(x+h)\ ^{1})=Q_1+2Q_2h+3Q_3h^2+\ldots+nQ_nh^{n-1}\ldots$$

$$\varphi''(h)=f''(x+h)=2\cdot1\cdot Q_2+3\cdot2Q_3h+\ldots.$$
$$+n(n-1)Q_nh^{n-2}$$

$$\varphi'''(x)=f'''(x+h)=3\cdot2\cdot Q_3+4\cdot3\cdot2Q_4+\ldots.$$
$$+n(n-1)(n-2)Q_nh^{n-3}$$

. . . . . .

и т. д.

$$\varphi^{(n)}(h)=f^{(n)}(x+h)=n(n-1)(n-2)\ldots.(2)\cdot1\cdot Q_n+$$
$$+(n+1)(n)\ldots.2\cdot Q_{n+1}h+\ldots.$$

Полагая въ этихъ равенствахъ $h=0$ получимъ:

$$Q_1=\varphi'(0)=f'(x)$$

$$Q_2=\frac{1}{1\cdot2}\cdot\varphi''(0)=\frac{1}{1\cdot2}\cdot f''(x)$$

$$Q_3=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\cdot\varphi'''(0)=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\cdot f'''(x)$$

. . . . . .

---

[1]) Чтобы взять производную функціи $f(x+h)$ по буквѣ h, вообразимъ сперва что $x+h$ замѣнено одною буквою z, тогда будетъ $f(x+h)=f(z)$ и по теоремѣ о функціи отъ функціи $[f(x+h)]'=f'(z)\cdot z'$ но $z'=(x+h)'=1$. Значитъ $[f(x+h)]'=f'(z)=f'(x+h)$. Точно также и $[f(x+h)]''=f''(x+h)$ и т. д.

и вообще

$$Q_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}\cdot \varphi^{(n)}(0) = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}\cdot f^{(n)}(x).$$

Подставляя въ формулу (7), имѣемъ:

$$f(x+h) - f(x) = h\cdot f'(x) + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''(x) + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot f'''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\cdot f^{(n)}(x) + \ldots \quad (8).$$

Для цѣлой функціи эта формула совпадетъ какъ разъ съ формулой (6), такъ какъ если-бы $f(x) = F(x)$ была-бы цѣлою функціей n-ой степени, то рядъ кончился бы на n-омъ членѣ, ибо всѣ производныя, которыхъ порядокъ выше n, были-бы равны нулю.

Замѣчая что $f(x) = Q_0 = \varphi(0)$, мы то же равенство (7) можемъ написать въ такомъ видѣ:

$$\varphi(h) = \varphi(0) + \frac{h}{1}\cdot \varphi'(0) + \frac{h^2}{1\cdot 2}\cdot \varphi''(0) + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\varphi'''(0) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\cdot \varphi^{(n)}(0) + \ldots \quad (9).$$

или замѣнивъ букву h буквою z:

$$\varphi(z) = \varphi(0) + \frac{z}{1}\cdot \varphi'(0) + \frac{z^2}{1\cdot 2}\cdot \varphi''(0) + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot \varphi'''(0) + \ldots$$
$$+ \frac{z^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\cdot \varphi^{(n)}(0) + \ldots \quad (9')$$

Эта формула даетъ разложеніе функціи $\varphi(z)$ по степенямъ перемѣнной независимой z.

§ 61. Полученныя нами общія формулы (8) и (9) не могутъ считаться строго доказанными — въ самомъ дѣлѣ мы *допустили* существованіе разложенія вида (7), причемъ во второй части его стоитъ безконечный рядъ, сходимость котораго намъ неизвѣстна. Затѣмъ мы этотъ рядъ дифференцировали, какъ

будто-бы число членовъ его было конечное, что какъ упомянуто въ § 58 не всегда возможно. Поэтому полученныя формулы необходимо провѣрить. Эта провѣрка должна состоять въ томъ, что надо убѣдиться, дѣйствительно-ли сумма первыхъ n членовъ ряда стоящаго въ правой части формулы (8) или (9) приближается по мѣрѣ возрастанія n къ тому, что стоитъ въ лѣвой части этихъ равенствъ.

Теорема Ролля.

§ 62. Намъ понадобится слѣдующая теорема называемая *теоремою Ролля*, а именно: *Если функція $f(x)$ и ея производная $f'(x)$ непрерывны и при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ $x=a$ и $x=b$ функція обращается въ ноль, т. е. $f(a)=0$ и $f(b)=0$, то ея производная $f'(x)$ обращается въ ноль при нѣкоторомъ частномъ значеніи $x=c$ лежащемъ между a и b.*

Эту теорему иногда выражаютъ короче, такъ: *между двумя послѣдовательными корнями функціи лежитъ покрайней мѣрѣ одинъ корень ея производной, когда и функція и ея производная непрерывны.*

Въ самомъ дѣлѣ положимъ, что $a<b$; такъ какъ при $x=a$, $f(a)=0$ и затѣмъ при $x=b$ значеніе функціи $f(b)=0$, то, если эта функція не равна нулю на всемъ протяженіи отъ $x=a$ до $x=b$ (а въ этомъ случаѣ и производная все время равна нулю), то функція не могла быть все время возрастающей или все время убывающей, а непремѣнно если сперва возрастала, то затѣмъ, чтобы вернуться къ нулю, должна была стать убывающей и наоборотъ. Въ § 21 было упомянуто, что пока функція возрастаетъ ея производная положительная, а когда убываетъ то — отрицательная. Слѣдовательно въ промежуткѣ отъ $x=a$ до $x=b$ производная $f'(x)$ мѣняетъ свой знакъ, а такъ какъ по условію она непрерывна, то (§ 19) она при нѣкоторомъ $x=c$, лежащемъ между a и b обращается въ ноль.

§ 63. И такъ возьмемъ въ рядѣ (8) первые n членовъ и обозначимъ черезъ R_n разность между ихъ суммою и величи-

ною стоящей въ лѣвой части этого равенства, т. е. положимъ:

$$f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{1\cdot 2}\cdot f''(x) - \ldots .$$
$$- \frac{h^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\cdot f^n(x) = R_n \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Относительно R_n можно сказать, что эта величина будетъ нѣкоторой функціей отъ x и h, и притомъ такой, которая при $h = 0$ обращается въ ноль, слѣдовательно можно положить:

$$R_n = h^p \cdot Q$$

гдѣ p какое угодно цѣлое число, которое мы себѣ напередъ зададимъ, Q пока неизвѣстная величина.

На основаніи этого равенство (10) можно написать въ такомъ видѣ:

$$f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{1\cdot 2}\cdot f''(x) - \ldots .$$
$$- \frac{h^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} f^{(n)}(x) - h^p Q = 0 \quad . \quad . \quad (11).$$

Разсмотримъ вспомогательную функцію

$$\omega(z) = f(x+h) - f(x+h-z) - zf'(x+h-z) -$$
$$- \frac{z^2}{1\cdot 2}\cdot f''(x+h-z) \ldots - \frac{z^n}{1\cdot \ldots \cdot n}\cdot f^n(x+h-z) - z^p \cdot Q$$

очевидно, что при $z = 0$ эта функція обращается въ ноль, ибо

$$\omega(0) = f(x+h) - f(x+h) = 0$$

при $z = h$ эта функція также обращается въ ноль ибо будетъ:

$$\omega(h) = f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{1\cdot 2}\cdot f''(x) \ldots .$$
$$- \frac{h^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\cdot f^n(x) - h^p Q$$

что въ силу равенства (11) есть ноль.

Значитъ производная функціи $\omega(z)$ имѣетъ корень между $z=0$ и $z=h$, пусть этотъ корень есть $z=k$ причемъ $0<k<h$.

Составивъ выраженіе производной $\omega'(z)$ и сдѣлавъ въ немъ $z=k$, уравняемъ результатъ нулю, получимъ уравненіе, изъ котораго и найдемъ неизвѣстную Q.

Составляя производную $\omega'(z)$, надо обратить вниманіе на то, что по теоремѣ о производныхъ функціи отъ функціи будетъ:

$$[f(x+h-z)]' = f'(x+h-z)(x+h-z)' = -f'(x+h-z)$$

и вообще:

$$[f^{(l)}(x+h-z)]' = f^{(l+1)}(x+h-z)(x+h-z)' = \\ = -f^{(l+1)}(x+h-z)$$

тогда получимъ:

$$\omega'(z) = f'(x+h-z) + zf''(x+h-z) + \frac{z^2}{1\cdot 2}\cdot f'''(x+h-z) + \ldots$$

$$+\frac{z^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\cdot f^{(n+1)}(x+h-z) - pz^{p-1}\cdot Q$$

$$-f'(x+h-z) - \frac{z}{1}\cdot f''(x+h-z) - \ldots .$$

$$-\frac{z^{n-1}}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)} f^n(x+h-z)$$

или по сокращеніи подобныхъ членовъ

$$\omega'(z) = \frac{z^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\cdot f^{(n+1)}(x+h-z) - p\cdot z^{p-1}\cdot Q.$$

Дѣлая въ этомъ равенствѣ, какъ сказано $z=k$, получимъ

$$0 = \frac{k^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\cdot f^{n+1}(x+h-k) - p\cdot k^{p-1}\cdot Q.$$

Откуда слѣдуетъ

$$Q = \frac{k^{n-p+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot p}\cdot f^{(n+1)}(x+h-k).$$

Замѣчая, что

$$0 < k < h$$

мы можемъ положить $h - k = \theta h$, тогда θ будетъ положительная правильная дробь, т. е.

$$0 < \theta < 1.$$

Очевидно что

$$k = (1 - \theta) h$$

и слѣдовательно будетъ:

$$Q = \frac{(1-\theta)^{n+1-p} \cdot h^{n+1-p}}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot p} \cdot f^{(n+1)}(x + \theta h)$$

значитъ:

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n+1-p} \cdot h^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot p} \cdot f^{(n+1)}(x + \theta h) \quad . \quad (12)$$

и вмѣсто формулы (8) мы получимъ такую:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1} \cdot f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \cdot f^{(n)}(x) + R_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

причемъ R_n имѣетъ вышеуказанное значеніе (12).

Этотъ результатъ показываетъ, что формула (8) имѣетъ мѣсто только тогда, когда при неопредѣленномъ возрастаніи n величина R_n стремится къ нулю.

Формула (13) и называется *рядомъ Тейлора*, величина-же R_n *остаточнымъ или дополнительнымъ членомъ* этого ряда.

Въ общемъ выраженіи остаточнаго члена R_n ряда Тейлора

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n+1-p} \cdot h^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot p} f^{(n+1)}(x + \theta h) \quad . \quad . \quad (12)$$

p есть любое цѣлое число.

Обыкновенно пользуются слѣдующими двумя формами остаточнаго члена, которыя получаются приписывая въ общемъ

выраженіи (12) числу p частныя значенія, а именно: дѣлая $p = n + 1$ получимъ:

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{1.2.3 \ldots n.(n+1)} \cdot f^{(n+1)}(x + \theta h) \quad . \quad (14)$$

дѣлая же $p = 1$ получимъ:

$$R_n = \frac{(1-\theta)^n \cdot h^{n+1}}{1.2.3 \ldots n} \cdot f^{(n+1)}(x + \theta h) \quad . \quad . \quad (15)$$

причемъ, въ обоихъ случаяхъ θ есть нѣкоторая положительная правильная дробь, т. е.

$$0 < \theta < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Замѣтимъ, что Тейлоръ въ своемъ сочиненіи «Methodus incrementorum» вышедшемъ въ 1715 году далъ формулу (8), что же касается дополнительнаго члена, то онъ впервые былъ данъ Лагранжемъ въ 1797 году въ формѣ:

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{1.2.3 \ldots (n+1)} \cdot f^{(n+1)}(x + \theta h) \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

которая получается изъ (12) полагая $p = n + 1$.

Затѣмъ Коши около 1820 г. вывелъ слѣдующую форму остаточнаго члена:

$$R_n = \frac{(1-\theta)^n \cdot h^{n+1}}{1.2.3 \ldots n} \cdot f^{(n+1)}(x + \theta h) \quad . \quad . \quad (16)$$

которая получается изъ (12) полагая $p = 1$.

Общая-же форма (12) остаточного члена была дана Шлемильхомъ около 1850 года.

Это служитъ примѣромъ той медленности, съ которою развивалась наука.

§ 64. И такъ, мы имѣемъ слѣдующую основную формулу представляющую разложеніе приращенія функціи по степенямъ

приращенія перемѣнной независимой — *рядъ Тейлора:*

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} \cdot f'(x) + \frac{h^2}{1.2} \cdot f''(x) + \ldots .$$

$$+ \frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots . n} \cdot f^{(n)}(x) + R_n \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

причемъ

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . (n+1)} \cdot f^{(n+1)}(x + \theta h) \quad . \quad . \quad (18)$$

или

$$R_n = \frac{(1-\theta)^n \cdot h^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . n} \cdot f^{(n+1)}(x + \theta h) \quad . \quad . \quad (19)$$

гдѣ

$$0 < \theta < 1.$$

Полагая въ формулѣ (17) $x = 0$ и написавъ затѣмъ вмѣсто буквы h букву x, мы получимъ формулу

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{1.2} \cdot f''(0) + \ldots .$$

$$+ \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . n} \cdot f^{(n)}(0) + R_n \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

причемъ

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots n(n+1)} \cdot f^{(n+1)}(\theta x) \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

или

$$R_n = \frac{(1-\theta)^n \cdot x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . n} \cdot f^{(n+1)}(\theta x) \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

гдѣ по прежнему

$$0 < \theta < 1.$$

Это есть такъ называемый *рядъ Маклорена*, который даетъ разложеніе функціи по степенямъ перемѣнной независимой.

Замѣтимъ еще одинъ видъ, въ которомъ можетъ быть написанъ рядъ Тейлора, а именно: сдѣлаемъ сперва въ формулѣ (17) $x = a$, гдѣ a какое-нибудь заданное число, и затѣмъ замѣнимъ h черезъ $x - a$; тогда очевидно $x + h$ замѣ-

пится окончательно величиною $a+x-a=x$ и мы получимъ:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}\cdot f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}\cdot f''(a)+\ldots\ldots$$

$$+\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2}\cdot f^{(n)}(a)+R_n$$

причемъ

$$R_n=\frac{(x-a)^{n+1}}{1\cdot 2\ldots\ldots(n+1)}\cdot f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]$$

или

$$R_n=\frac{(1-\theta)^n\cdot(x-a)^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots n}\cdot f^{(n+1)}[(a+\theta(x-a)].$$

Эта формула даетъ разложеніе функціи по степенямъ двучлена $x-a$.

Приведемъ въ заключеніе тѣ ограниченія, которымъ должны быть подчинены функція $f(x)$ и ея производныя, чтобы всѣ эти формулы (13—23) имѣли мѣсто.

Для этого надо обратить вниманіе на выводъ этихъ формулъ; этотъ выводъ былъ основанъ на примѣненіи теоремы Ролля къ составленной нами вспомогательной функціи $\omega(z)$. А чтобы теорема Ролля была примѣнима, надо, чтобы какъ эта функція $\omega(z)$, такъ и ея производная были *непрерывны*, а значитъ и *конечны*, въ промежуткѣ отъ $z=0$ до $z=h$, въ которомъ мы эту функцію разсматриваемъ.

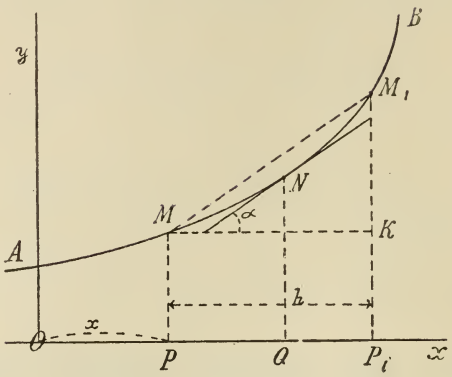
Какъ видно функція $\omega(z)$ и ея производная состоитъ изъ суммы членовъ вида $z^l\cdot f^{(l)}(x+h-z)$; значитъ, всѣ эти члены должны быть непрерывны, иначе: *функція f и всѣ ея производныя до $(n+1)^{\text{-ой}}$ включительно должны быть конечны и непрерывны для всѣхъ значеній аргумента отъ x до $x+h$.*

§ 65. Если въ формулѣ (17) ограничиться однимъ членомъ, т. е. положить $n=1$ и взять Лагранжеву форму остатка, то она приметъ видъ:

$$f(x+h)-f(x)=h\cdot f'(x+\theta h)$$

которому легко придать весьма простое геометрическое толкованіе (черт. 13).

Черт. 13.



Пусть кривая AB имѣетъ уравненіе $y = f(x)$ и точки ея M и M_1 соотвѣтствуютъ абсциссамъ x и $x+h$, тогда

$$PM = f(x), \quad P_1M_1 = f(x+h)$$
$$KM_1 = P_1M_1 - PM = f(x+h) - f(x).$$

Изъ треугольника KMM_1 видно что

$$KM_1 = \overline{MK} \cdot \operatorname{tg} \overline{KMM_1} = h \cdot \operatorname{tg} \overline{KMM_1}.$$

Будемъ перемѣщать хорду MM_1 параллельно самой себѣ пока она не станетъ касательною къ нашей кривой, что очевидно будетъ въ нѣкоторой точкѣ N между M и M_1, абсциссу этой точки OQ обозначимъ черезъ $x+\theta h$, тогда будетъ въ силу извѣстнаго геометрическаго значенія производной:

$$\operatorname{tg} KMM_1 = \operatorname{tg} \alpha = f'(x+\theta h)$$

и мы получимъ замѣняя KM_1 и $\operatorname{tg} KMM_1$ этими величинами формулу:

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h).$$

Обратимъ еще вниманіе на тотъ случай когда $n = 2$ тогда будетъ:

$$f(x+h) - f(x) = h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(x+\theta h).$$

Эта послѣдняя формула можетъ служить для сужденія о величинѣ погрѣшности, которую мы сдѣлаемъ, если полное приращеніе функціи т. е. величину $f(x+h) - f(x)$ замѣнимъ лишь первымъ его членомъ $hf'(x)$, т. е. вмѣсто приращенія функціи возьмемъ ея дифференціалъ, и затѣмъ дифференціалъ перемѣнной независимой замѣнимъ какимъ-нибудь частнымъ его значеніемъ h.

Какъ видно эта погрѣшность заключаетъ множитель $\frac{h^2}{2}$ поэтому часто можно, не вычисляя величины $f''(x+\theta h)$, по малости этого множителя, судить о малости величины $\frac{h^2}{2} f''(x+\theta h)$ и о возможности ею пренебречь при требуемой отъ производимаго вычисленія степени точности. Такимъ пріемомъ постоянно пользуются, напр. въ астрономіи, чтобы оцѣнить вліяніе погрѣшности въ данныхъ, на опредѣляемыя по нимъ искомыя.

Дадимъ нѣсколько простѣйшихъ примѣровъ такого примѣненія приближенной формулы

$$f(x+h) - f(x) = h \cdot f'(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*).$$

Примѣръ 1-й. Вмѣсто Sin 31° взятъ Sin 30°; вычислить поправку по формулѣ (*) и указать предѣлъ погрѣшности которую дѣлаемъ, пользуясь этой формулой.

Очевидно, въ нашемъ примѣрѣ функція $f(x) = \text{Sin } x$, затѣмъ x приписывается частное значеніе $x = 30° = \frac{\pi}{6}$ и h частное значеніе $h = 1° = \frac{\pi}{180} = 0{,}01745$.

Формула (*) будетъ:

$$\text{Sin}(x+h) - \text{Sin } x = h \text{ Cos } x$$

необходимо помнить (§ 26), что въ этой формулѣ h должно быть *непремѣнно* выражаемо отвлеченнымъ числомъ; такимъ образомъ имѣемъ

$$\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)-\operatorname{Sin}\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{180}\cdot\operatorname{Cos}\frac{\pi}{6}$$

или выражая первые два аргумента въ градусахъ:

$$\operatorname{Sin}31^\circ-\operatorname{Sin}30^\circ=0{,}01745\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}01512\ldots$$

Величина погрѣшности, которую сдѣлаемъ, воспользовавшись предыдущимъ результатомъ, будетъ даваться формулою

$$\eta=\frac{h^2}{2}\cdot f''(x+\theta h)$$

причемъ $0<\theta<1$.

Въ нашемъ случаѣ

$$f''(x)=(\operatorname{Sin}x)''=-\operatorname{Sin}x$$

$x+\theta h$ заключается между:

$$\frac{\pi}{6}\text{ и }\frac{\pi}{6}+0{,}01745\text{ т. е. между }30^\circ\text{ и }31^\circ$$

значитъ будетъ:

$$-\frac{(0{,}01745)^2}{2}\cdot\operatorname{Sin}31^\circ<\eta<-\frac{(0{,}01745)^2}{2}\cdot\operatorname{Sin}30^\circ$$

или

$$-0{,}0000784<\eta<-0{,}0000761.$$

Такимъ образомъ примѣняя приближенную формулу

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)$$

мы всегда имѣемъ возможность судить о предѣлахъ погрѣшности, которую мы сдѣлаемъ; хотя выраженіе этой погрѣшности

$$\eta=\frac{h^2}{2}f''(x+\theta h)$$

и содержитъ нѣкоторую неопредѣленную величину θ, но относительно θ намъ извѣстно, что это есть положительная правильная дробь.

Между тѣмъ въ формулѣ

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x) + \varepsilon h$$

намъ относительно величины ε было лишь извѣстно, что ε стремится къ нулю одновременно съ h, и судить о величинѣ ε мы не имѣли возможности.

Обратимъ вниманіе, что величина η убываетъ пропорціонально h^2 т. е. если бы, напр., мы взяли h равнымъ не 1°, а $0^\circ\,1'$, т. е. $h = \frac{0{,}01745}{60}$ то величина η была бы не въ 60, а въ 3600 разъ меньше нежели въ предыдущемъ примѣрѣ.

Примѣръ 2-й. Вычислить измѣненіе Log tg x, когда $x = 45^\circ$ и увеличится на $0^\circ\,1'$. Логариѳмъ предполагается табличный. т. е. при основаніи 10.

Извѣстно, что логариѳмы при основаніи 10 можно получить изъ неперовыхъ, умноживъ послѣдніе на такъ называемый модуль, равный 0,43429 . . . ; обозначимъ это число черезъ M, тогда будетъ:

$$f(x) = \text{Log tg } x = M \cdot \log \text{tg } x$$

$$f'(x) = (\text{Log tg } x)' = M \cdot \frac{1}{\text{tg } x} \cdot \frac{1}{\text{Cos}^2 x} = 0{,}43429 \cdot \frac{2}{\text{Sin } 2x}.$$

Въ формулѣ

$$f(x+h) - f(x) = h \cdot f'(x)$$

будетъ:

$$h = \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180} = 0{,}000291$$

$$f'(x) = 0{,}43429 \cdot \frac{2}{\text{Sin } 90^\circ} = 0{,}86858$$

$$h \cdot f'(x) = 0{,}000253.$$

слѣдовательно будетъ:

$$\text{Log tg } 45^\circ\, 1' = 0{,}000253$$

что какъ разъ и найдемъ въ таблицахъ.

Какъ видно остаточный членъ будетъ заключать множитель $\frac{h^2}{2}$, который равенъ:

$$\frac{(0{,}000291)^2}{2} = 0{,}00000004\ldots$$

и этимъ членомъ можно пренебречь, такъ какъ въ нашемъ случаѣ $f''(x+\theta h)$ при $x = 45^\circ$ составитъ также весьма малую величину.

ГЛАВА VIII.

Разложеніе функцій въ ряды.

§ 66. Представленіе функціи въ видѣ ряда, расположеннаго по степенямъ перемѣнной независимой, есть одинъ изъ наиболѣе общихъ способовъ, служащихъ какъ для изученія функцій, такъ, въ особенности, для вычисленія частнаго значенія функціи по данному значенію аргумента.

Теорема Маклорена даетъ для этого общій пріемъ. Въ самомъ дѣлѣ мы имѣли такой рядъ:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}\cdot f'(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2}\cdot f''(0) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot f'''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}\cdot f^{(n)}(0) + R_n \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

въ которомъ остаточный членъ R_n можно писать или въ видѣ:

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)}\cdot f^{(n+1)}(\theta x) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

причемъ

$$0 < \theta < 1$$

или въ видѣ:

$$R_n = \frac{x^{n+1} \cdot (1-\lambda)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots n} \cdot f^{(n+1)}(\lambda x). \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

причемъ

$$0 < \lambda < 1.$$

Эта формула имѣетъ мѣсто для всякой функціи, которая сама и всѣ ея производныя до $(n+1)^{\text{ой}}$ включительно конечны и непрерывны въ сопредѣльности со всякимъ значеніемъ перемѣнной независимой заключеннымъ между 0 и x.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда при неопредѣленномъ возрастаніи числа n членовъ ряда, дополнительный членъ приближается къ нулю, рядъ же остается сходящимся, то его можно разсматривать какъ безконечный. Формула (1) приметъ тогда видъ:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{1.2} \cdot f''(0) + \ldots .$$
$$+ \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots . n} \cdot f^n(0) + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

и послужитъ для разложенія функціи $f(x)$ въ безконечный рядъ.

Повторимъ здѣсь еще разъ тѣ условія, которыя должны имѣть мѣсто, чтобы рядъ, написанный въ правой части, дѣйствительно представлялъ заданную функцію $f(x)$:

1) Сама функція и всѣ ея производныя до любаго порядка должны быть конечными и непрерывными въ сопредѣльности съ любымъ значеніемъ перемѣнной независимой заключеннымъ между 0 и разсматриваемымъ значеніемъ ея.

2) Рядъ въ правой части (формула 4) долженъ быть сходящійся.

3) По мѣрѣ увеличенія числа n остаточный членъ

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots . (n+1)} \cdot f^{(n+1)}(\theta x) \quad [0 < \theta < 1]$$

или

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots . n} \cdot (1-\lambda)^n \cdot f^{(n+1)}(\lambda x) \; [0 < \lambda < 1)$$

долженъ приближаться къ нулю и

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \; R_n = 0.$$

Обыкновенно послѣднія два условія доставляютъ то значеніе перемѣнной, котораго она не должна превосходить по численной величинѣ, чтобы формула (4) имѣла мѣсто.

Въ тѣхъ-же случаяхъ, когда всѣ три условія соблюдены при всякомъ значеніи перемѣнной независимой, сколь бы велико оно не было, то для такой функціи рядъ примѣнимъ при всякомъ значеніи перемѣнной отъ $-\infty$ до $+\infty$.

§ 67. Приведемъ теперь разложенія въ ряды простѣйшихъ и наиболѣе употребительныхъ функцій, а именно:

$$e^x, \; \text{Sin } x, \; \text{Cos } x, \; \log(1 \pm x); \; (1+x)^m.$$

Разложеніе въ рядъ e^x

Итакъ пусть будетъ

$$f(x) = e^x$$

тогда:

$$f'(x) = f''(x) \; \ldots . = f^{(n)}(x) = e^x \ldots$$

полагая въ этихъ равенствахъ $x = 0$ получимъ:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \; \ldots . = f^{(n)}(0) = 1$$

Затѣмъ имѣемъ

$$f^{(n+1)}(x) = e^x$$

и слѣдовательно:

$$f(\theta x) = e^{\theta x}$$

Подставляя эти величины въ формулѣ (1), получимъ разложеніе:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots . + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots . n} + \\ + \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots . (n+1)} \cdot e^{\theta x}$$

При неопредѣленномъ возрастаніи n остаточный членъ

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} \cdot e^{\vartheta x}$$

приближается къ нулю, каково бы ни было значеніе x по абсолютной величинѣ. Въ самомъ дѣлѣ мы можемъ написать его такъ:

$$R_n = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{k} \cdot \frac{x}{k+1} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{n+1} \cdot e^{\vartheta x}$$

Очевидно, что всегда найдется такое цѣлое число k, которое или само равно x или между которымъ и слѣдующимъ за нимъ $k+1$, величина x заключается, ясно что произведеніе множителей бо́льшихъ 1, а именно

$$\frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{k} \cdot e^{\vartheta x}$$

конечное, остальные же множители

$$\frac{x}{k+1} \cdot \frac{x}{k+1} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{n+1}$$

всѣ меньше 1, число ихъ неопредѣленно возрастаетъ и величина множителя $\frac{x}{n+1}$ имѣетъ своимъ предѣломъ 0, понятно, что и предѣлъ всего произведенія есть ноль.

И такъ

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\ R_n = 0.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ легко видѣть, что рядъ:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} + \ldots$$

сходящійся при всякомъ x ибо отношеніе общаго члена къ предшествующему ему равно $\frac{x}{n}$ и предѣлъ этого отношенія есть 0.

Такимъ образомъ имѣемъ слѣдующее разложеніе функціи e^x *въ безконечный* рядъ:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots \quad (5)$$

имѣющее мѣсто *при всякомъ* x.

Разложеніе въ рядъ $\sin x$ и $\cos x$

§ 68. Выведемъ теперь разложенія функцій

$$\text{Sin } x \text{ и Cos } x.$$

Пусть будетъ:

$$f(x) = \text{Sin } x$$

Тогда

$$f'(x) = \quad \text{Cos } x = \text{Sin}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$f''(x) = -\text{Sin } x = \text{Sin}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f'''(x) = -\text{Cos } x = \text{Sin}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f^{IV}(x) = \quad \text{Sin } x = \text{Sin}\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = \qquad = \text{Sin}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Дѣлая $x = 0$ получимъ:

$$f(0) = 0$$
$$f'(0) = 1;\ f''(0) = 0;\ f'''(0) = -1;\ f^{(IV)}(0) = 0 \ldots$$

вообще:

$$f^{(n)}(0) = \text{Sin}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

такъ что, когда n число четное, то $f^{(n)}(0) = 0$; когда же n число нечетное, то $f^{(n)}(0) = \pm 1$, смотря по тому, какой остатокъ получается отъ дѣленія числа n на 4, т. е. 1 или 3.

Наконецъ

$$f^{(n+1)}(\theta x) = \text{Sin}\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующее разложеніе, взявъ $n = 2k+1$

$$\operatorname{Sin} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots +$$

$$+ (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{1.2\ldots(2k+1)} + R_n$$

причемъ

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} \cdot \operatorname{Sin}\left[\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

Изъ сказаннаго выше относительно остатка при разложеніи e^x, очевидно что и здѣсь пред. $R_n = 0$. Вмѣстѣ съ тѣмъ $n=\infty$ легко видѣть сходимость ряда при всякомъ x.

Такимъ образомъ получимъ:

$$\operatorname{Sin} x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots +$$

$$+ (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{1.2\ldots(2k+1)} + \ldots \ldots \quad (6)$$

Совершенно такимъ-же образомъ взявъ

$$f(x) = \operatorname{Cos} x$$

Составивъ выраженія производныхъ

$$f'(x) = -\operatorname{Sin} x = \operatorname{Cos}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\operatorname{Cos} x = \operatorname{Cos}\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = \operatorname{Sin} x = \operatorname{Cos}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(IV)}(x) = \operatorname{Cos} x = \operatorname{Cos}\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

. . . . . .

$$f^{(n)}(x) = \qquad = \operatorname{Cos}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Полагая въ нихъ $x = 0$ получимъ:

$$f(0) = 1;\ f'(0) = 0;\ f''(0) = -1;\ f'''(0) = 0 \text{ и т. д. . . .}$$

Подставляя въ формулу Маклорена и повторивъ то же разсужденіе, какъ относительно Sin x, получимъ что Cos x при всякомъ x разлагается въ такой рядъ:

$$\text{Cos} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots + \\ + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{1.2\ldots.2k} + \ldots \quad (7)$$

Полученные для Sin x и Cos x ряды могутъ служить для вычисленія этихъ функцій при *любомъ* значеніи аргумента x, но необходимо помнить, что этотъ аргументъ долженъ быть выраженъ *отвлеченнымъ* числомъ, а не въ градусахъ, минутахъ и секундахъ (см. § 26).

Такъ, напр., чтобы вычислить

$$\text{Sin } 10^\circ \text{ и Cos } 10^\circ$$

надо прежде всего выразить аргументъ отвлеченнымъ числомъ именно:

$$10^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 10 = 0{,}1745329 \ldots .$$

сдѣлавъ въ формулѣ (6) $x = 0{,}1745 \ldots .$ получимъ:

$$\text{Sin } 10^\circ = \text{Sin } (0{,}1745\ldots) = \frac{0.1745\ldots}{1} - \frac{(0{,}1745\ldots)^3}{1.2.3} + \\ + \frac{(0.1745\ldots)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots .$$

и

$$\text{Cos } 10^\circ = \text{Cos } (0{,}1745\ldots) = 1 - \frac{(0{,}1745\ldots)^2}{1.2} + \frac{(0{,}1745\ldots)^4}{1.2.3.4} - \ldots .$$

и произведя вычисленіе получаемъ:

$$\begin{aligned}
&\frac{0{,}1745329}{1} = +0{,}1745329\\
-&\frac{(0{,}1745329)^3}{1.2.3} = -0{,}0008860\\
+&\frac{(0{,}1745329)^5}{1.2.3.4.5} = +0{,}0000013\\
&\text{Sin } 10^\circ = \quad 0{,}1736482.
\end{aligned}$$

При вычисленіи мы остановились на членѣ $\frac{(0{,}1745\ldots)^5}{1.2.3.4.5}$, такъ какъ слѣдующіе за нимъ уже не вліяютъ на 7-ой десятичный знакъ, съ точностью до котораго все наше вычисленіе производится.

Въ самомъ дѣлѣ, рядъ нашъ знакоперемѣнный; значитъ, остановившись на указанномъ членѣ, мы въ суммѣ ряда дѣлаемъ погрѣшность по абсолютной величинѣ меньшую (§ 51) перваго изъ отброшенныхъ членовъ, т. е. меньшую:

$$\frac{(0{,}1745\ldots)^7}{1.2.\ldots.7} = \frac{(0{,}1745\ldots)^5}{1.\ldots.5} \cdot \frac{(0{,}1745)^2}{6.7} = 0{,}0000013 \cdot \frac{0{,}0302\ldots}{42} < 0{,}00000001.$$

Совершенно также предлагается вычислить $\text{Cos } 10^\circ = 0{,}9848078$.

Задача. Вычислить $\text{Sin } 30^\circ = \text{Sin } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и показать на какомъ членѣ можно остановиться, чтобы погрѣшность была меньше 0,0000001.

Sin и cos малыхъ дугъ.

§ 69. Ряды для Sin x и Cos x сходятся тѣмъ быстрѣе, чѣмъ x меньше, такъ напримѣръ если $x = 1^\circ = 0{,}01745\ldots$ то уже второй членъ ряда

$$\frac{x^3}{1.2.3} = \frac{(0{,}01745\ldots)^3}{6} = 0{,}0000009 < 0{,}000001.$$

значитъ если при вычисленіи довольствоваться лишь первыми 6-ю знаками послѣ запятой, то пока $x \leqq 0{,}01745\ldots.$ т. е.

$x \leqq 1^\circ$, можно брать лишь одинъ членъ въ ряду для Sin x и писать

$$\text{Sin } x = x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

и тогда если число секундъ аргумента x есть a то будетъ

$$x = \frac{\pi}{180 \,.\, 60 \,.\, 60} \cdot a = \frac{1}{206264.8} \cdot a$$

или обозначивъ для краткости число $\frac{1}{206264,8}$ черезъ K получимъ:

$$\text{Sin } x = \text{Sin } a'' = K \cdot a$$

Съ другой стороны будетъ при $a = 1$

$$\text{Sin } 1'' = K = \frac{1}{206264,8} = 0,000004848137$$

и значитъ:

$$\text{Sin } a'' = a \cdot \text{Sin } 1'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

такъ напр. будетъ:

$$\text{Sin } 0^\circ 21' 37'' = \text{Sin } 1297'' = 1297 \cdot \text{Sin } 1'' = 0,006288.$$

Точно также въ разложеніи cos x, часто пока x остается меньше такой величины, что членъ $\frac{x^4}{1.2.3.4}$ не оказываетъ вліянія на послѣдній знакъ въ производимомъ вычисленіи, то удерживаютъ лишь первые два члена разложенія т. е. пишутъ приближенное равенство:

$$\text{Cos } x = 1 - \frac{x^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Приближенными формулами (8) (9) часто пользуются въ прикладныхъ наукахъ для такъ называемыхъ «малыхъ угловъ» причемъ, какъ слѣдуетъ изъ смысла этихъ формулъ, понятіе о «малости» угла опредѣляется тою точностью, которая отъ результата требуется.

Разложеніе въ рядъ $\log 1 \pm x$

§ 70. Покажемъ теперь ряды, которые служатъ для вычисленія логариѳмовъ чиселъ.

Пусть будетъ

$$f(x) = \log (1+x)$$

тогда

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{(1+x)^3}$$

. . . . . .

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot \frac{1}{(1+x)^n}$$

Полагая $x = 0$, получимъ

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = -1 \cdot$$

$$f'''(0) = 1 \cdot 2 \cdot$$

. . . . . .

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{(n-1)} \cdot 2 \cdot 3 \ldots . (n-1)$$

и

$$f^{(n+1)}(\vartheta x) = (-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . n \cdot \frac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1}}$$

Формула Маклорена даетъ:

$$\log (1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots . + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + R_n$$

причемъ

$$R_n = (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1}} .$$

Изъ сказаннаго въ § 56 слѣдуетъ, что остаточный членъ R_n приближается при неопредѣленномъ выростаніи n къ нулю лишь пока x остается меньше или въ крайнемъ случаѣ равенъ 1. При этомъ же условіи и получаемый рядъ остается сходящимся (§ 51) значитъ будетъ:

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \\ + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

при условіи что

$$0 < x \leqq 1.$$

Совершенно также получимъ разложеніе

$$\log(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + R_n \quad . \quad (11)$$

причемъ остаточный членъ R_n можно брать или въ формѣ Лагранжа:

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1-\theta x)^{n+1}}$$

или въ формѣ Коши:

$$R_n = (1-\lambda)^n \cdot x^{n+1} \cdot \frac{1}{(1-\lambda x)^{n+1}} .$$

Изъ сказаннаго въ § 64 слѣдуетъ что формула (11) имѣетъ мѣсто пока x *меньше* 1, ибо производная

$$[\log(1-x)]' = -\frac{1}{1-x}$$

при $x = 1$ обращается въ безконечность, рядъ-же Маклорена имѣетъ мѣсто лишь до тѣхъ поръ пока сама функція и *всѣ* ея производныя до $(n+1)^{\text{-ой}}$ включительно остаются конечными и непрерывными для всѣхъ значеній x отъ 0 до разсматриваемаго.

И такъ необходимо чтобы было

$$0 < x < 1.$$

Разсмотримъ, каковъ въ этомъ случаѣ будетъ предѣлъ остаточнаго члена R_n. Если взять форму Лагранжа, то хотя множитель

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

и приближается къ нулю, но множитель $\frac{1}{(1-\vartheta x)^{n+1}}$ неопредѣленно возрастаетъ вмѣстѣ съ n, и значитъ, разсматривая остаточный членъ въ этой формѣ, мы не можемъ непосредственно судить о предѣлѣ, къ которому онъ будетъ приближаться.

Обратимся къ остаточному члену, написанному въ формѣ Коши

$$R_n = (1-\lambda)^n \cdot x^{n+1} \cdot \frac{1}{(1-\lambda x)^{n+1}}$$

причемъ

и
$$\left.\begin{aligned} 0 < \lambda < 1 \\ 0 < x < 1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11')$$

Написавъ R_n въ слѣдующемъ видѣ

$$R_n = \frac{1}{1-\lambda x} \cdot x^{n+1} \cdot \left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda x}\right)^n$$

мы видимъ, что множитель $\frac{1}{1-\lambda x}$ конечный, множитель x^{n+1} имѣетъ своимъ предѣломъ 0 ибо $x < 1$. Въ силу неравенствъ (11′) если только λ не равно 0 будетъ:

$$\frac{1-\lambda}{1-\lambda x} < 1 \ ^{1})$$

---

[1]) Напр. при $\lambda = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{2}{3}$ будетъ:

$$\frac{1-\lambda}{1-\lambda x} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}} < 1.$$

значитъ (§ 54) множитель $\left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda x}\right)^{n+1}$ при неопредѣленномъ возрастаніи n имѣетъ тогда своимъ предѣломъ 0, если-же $\lambda = 0$, то множитель $\left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda x}\right)^{n+1}$ обращается въ 1.

Отсюда видно что величина R_n заключаетъ всегда такой множитель, коего предѣлъ есть нуль, остальные же множители конечные. Значитъ пред. $R_n = 0$.
$n=\infty$

Такимъ образомъ имѣемъ рядъ:

$$\log(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} - . \quad (12)$$

при условіи $0 < x < 1$.

Изъ формулъ (10) и (12) вытекаетъ слѣдующая:

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots\right]. \quad (13)$$

Вычисленіе логарифмовъ чиселъ.

§ 71. Чтобы воспользоваться формулами (10), (12), (13), для вычисленія логариѳмовъ чиселъ, можно поступить слѣдующимъ образомъ: положимъ что мы знаемъ $\log N$, и покажемъ какъ найти $\log(N+h)$. Для этого положимъ, что

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{N+h}{N}$$

откуда

$$x = \frac{h}{2N+h}$$

и подставляя получимъ:

$$\log\frac{N+h}{N} = 2\left[\frac{h}{2N+h} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{2N+h}\right)^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{h}{2N+h}\right)^5 + \ldots\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

и въ частномъ случаѣ, когда $h = 1$ будемъ имѣть:

$$\log\frac{N+1}{N} = 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2N+1)^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2N+1)^5} + \ldots\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

или

$$\log(N+1) = \log N + 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2N+1)^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2N+1)^5} + \ldots\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Такъ зная что $\log 1 = 0$ получимъ дѣлая $N = 1$

$$\log 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \ldots\right]$$

вычисляя имѣемъ:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} &= 0{,}3333333 \\
\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} &= 0{,}0123457 \\
\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} &= 0{,}0008230 \\
\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7} &= 0{,}0000653 \\
\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9} &= 0{,}0000057 \\
\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}} &= 0{,}0000005 \\
\hline
& 0{,}3465735
\end{aligned}$$

$$\log 2 = 2 \cdot 0{,}3465735 = 0{,}693147$$

Имѣя $\log 2$ найдемъ $\log 3$, воспользовавшись тѣмъ-же рядомъ и дѣлая въ немъ $N = 2$:

$$\log 3 = \log 2 + 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} + \ldots\right]$$
$$= 1{,}098612$$

затѣмъ:

$$\log 4 = 2\log 2 = 1{,}386294$$
$$\log 5 = \log 4 + 2\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^5} + \ldots\right]$$
$$= 1{,}6094379$$

и т. д.

Выше указанные ряды даютъ такъ называемые Неперовы или натуральные логариѳмы. Чтобы получить обыкновенные т. е. при основаніи 10 надо вычислить такъ называемый модуль, т. е. log 10. Очевидно будетъ:

$$\log 10 = \log 5 + \log 2 = 2{,}302585 \ldots .$$

значитъ чтобы получить обыкновенные логариѳмы, надо вычисленные выше дѣлить на 2,302585 или умножать на:

$$M = \frac{1}{2{,}302585} = 0{,}434294 \ldots .$$

Такимъ образомъ получится:

$$\log 2 = 0{,}693147 \,.\, 0{,}434294 = 0{,}301030$$
$$\log 3 = 1{,}098612 \,.\, 0{,}434294 = 0{,}477121$$
$$\log 4 = \quad 2 \log 2 \quad = 0{,}602060$$
$$\log 5 = 1{,}609438 \,.\, 0{,}434294 = 0{,}698970$$

и т. д.

Замѣтимъ что когда модуль M вычисленъ, то можно вычислять и непосредственно обыкновенные логариѳмы пользуясь рядомъ, который получится, умноживъ обѣ части формулы (16) на M и замѣтивъ, что

$$M \cdot \log (N+1) = \mathrm{Log}\,(N+1)$$

и

$$M \cdot \log N = \mathrm{Log}\, N$$

гдѣ знакомъ Log обозначенъ обыкновенный логариѳмъ, тогда будетъ:

$$\mathrm{Log}\,(N+1) = \mathrm{Log}\, N + 2M \cdot \left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2N+1)^3} + \ldots\right]$$

причемъ

$$M = 0{,}4342944 \ldots .$$

Такъ напр. будетъ:

$$\text{Log } 11 = 1 + 2 \cdot 0{,}43429... \left[\frac{1}{21} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(21)^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{21^5} + \right] ....$$
$$= 1{,}0413927.$$

Рядъ стоящій въ [ ] очевидно сходится тѣмъ быстрѣе, чѣмъ число N больше, такъ при $N = 100$ вычисляя на 7 знаковъ, можно ограничиваться первыми двумя членами, а при $N = 1000$ и однимъ первымъ его членомъ.

Мы ограничимся этими указаніями на возможность составленія таблицъ логариѳмовъ, не входя въ описаніе тѣхъ техническихъ пріемовъ, которыми дѣйствительно пользовались при составленіи таблицъ.

§ 72. Примѣнимъ теперь формулу Маклорена къ разложенію въ рядъ функціи

$$f(x) = (1 + x)^{\mu}$$

причемъ μ есть какое угодно положительное или отрицательное, цѣлое или дробное число.

Тогда будетъ (см. § 40)

$$f^{(n)}(x) = \mu(\mu - 1)(\mu - 2) \ldots . (\mu - n + 1) \cdot (1 + x)^{\mu - n}$$

дѣлая здѣсь $x = 0$ и полагая послѣдовательно $n = 1, 2, 3, ...$ получимъ:

$$f(0) = 1$$
$$f'(0) = \mu$$
$$f''(0) = \mu(\mu - 1)$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$f^{(n)}(0) = \mu(\mu - 1)(\mu - 2)(\mu - n - 1)$$

Затѣмъ имѣемъ

$$f^{(n+1)}(x) = \mu(\mu - 1) \ldots . (\mu - n + 1)(\mu - n) \cdot (1 + x)^{\mu - n - 1}$$

и слѣдовательно

$$f^{n+1}(\theta x) = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)(\mu-n)(1+\theta x)^{\mu-n+1}$$

Подставляя въ рядъ Маклорена, получимъ:

$$(1+x)^{\mu} = 1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\ldots.$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\cdot x^n+R_n \quad . \quad . \quad (17)$$

причемъ остаточный членъ R_n можно писать или въ формѣ Лагранжа:

$$R_n = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)}\cdot x^{n+1}\cdot(1+\theta x)^{\mu-n-1} \quad . \quad (18)$$

или въ формѣ Коши:

$$R_n = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}x^{n+1}(1-\lambda)^n(1+\lambda x)^{\mu-n+1} \quad (19)$$

Формула (17) принимаетъ простѣйшій видъ, когда показатель μ есть цѣлое и положительное число.

Пусть напр. $\mu = k$; тогда производная порядка k отъ функціи $(1+x)^k$ будетъ равна постоянной величинѣ $k.(k-1)\ldots 2\cdot 1$ и всѣ дальнѣйшія производныя будутъ нули, поэтому рядъ, будетъ конечный и если въ немъ взять $n \geq k$, то будетъ: $R_n = 0$, и мы получимъ:

$$(1+x)^k = 1+\frac{k}{1}\cdot x+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{k(k-1)\ldots(k-l+1)}{1\cdot 2\ldots l}x^l+$$
$$+\ldots.+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}\cdot x^k$$

или иначе:

$$(1+x)^k = 1+\frac{k}{1}\cdot x+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots.+$$
$$+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-l+1)}{1\cdot 2\ldots l}x^l+\ldots.+\frac{k}{1}x^{k-1}+x^k$$

извѣстную изъ элементарной алгебры формулу бинома Ньютона для цѣлаго и положительнаго показателя.

Когда же показатель не есть цѣлый и положительный, то ни одна изъ производныхъ нулемъ не будетъ и рядъ, стоящій во второй части формулы (17) можно продолжать сколь угодно далеко. Разсмотримъ, при какихъ условіяхъ этотъ рядъ, предполагаемый безконечнымъ, будетъ оставаться сходящимся, и предѣлъ остаточнаго члена R_n при неопредѣленномъ возрастаніи n будетъ ноль.

И такъ, будемъ разсматривать рядъ:

$$1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu\cdot(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)\ldots\mu-n+1}{1\cdot 2\ldots n}x^n+\ldots \quad (21)$$

Составивъ отношеніе $(n+1)^{\text{аго}}$ члена этого ряда къ предыдущему получимъ:

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots\mu-n+1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}x^{n+1}:\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}\cdot x^{n-1}=$$
$$=\frac{\mu-n+1}{n}x=-\left(1-\frac{\mu-1}{n}\right)x \quad \ldots \quad (*)$$

какъ видно предѣлъ этого отношенія при $n=\infty$ *по численной величинѣ* есть x. Значитъ, если бы вмѣсто ряда (21) разсматривать рядъ составленный изъ численныхъ величинъ его членовъ, взятыхъ съ однимъ и тѣмъ же знакомъ напр. $+$, то этотъ послѣдній былъ бы *сходящимся*, когда x меньше единицы. *Это показываетъ, что разсматриваемый рядъ* (21) **абсолютно** *сходящійся, когда* x *численно меньше* 1 *т. е. когда* $-1<x<1$.

Если же $x>1$ по численной величинѣ, то изъ формулы (*) слѣдуетъ, что предѣлъ отношенія послѣдующаго члена къ предыдущему былъ бы больше 1; значитъ, начиная съ нѣкотораго члена, члены ряда стали бы *возрастать* по численной вели-

чинѣ, предѣлъ общаго члена ряда не былъ бы равенъ нулю, и слѣдовательно рядъ былъ бы *расходящійся*.

И такъ, *разсматриваемый рядъ:*

$$1 + \frac{\mu}{1} x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^2 + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1}{1.2\ldots n} x^n + \ldots$$

сходящійся, и притомъ абсолютно, если x по численной величинѣ меньше 1, *т. е.* $-1 < x < 1$ *и расходящійся, если x по численной величинѣ больше* 1.

Обратимся теперь къ изслѣдованію остаточнаго члена R_n, причемъ мы ограничимся лишь тѣмъ случаемъ, когда x численно меньше 1, т. е. когда получаемый по формулѣ Маклорена рядъ — сходящійся.

Здѣсь, подобно тому какъ въ § 70 удобно для положительныхъ значеній x брать R_n въ формѣ Лагранжа, а для отрицательныхъ въ формѣ Коши.

Итакъ положимъ, что

$$0 \leqq x < 1.$$

тогда будетъ:

$$R_n = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)(\mu-n)}{1\cdot 2\ldots n\cdot(n+1)} \cdot x^{n+1} \cdot (1+\theta x)^{\mu-n-1}$$

причемъ

$$0 < \theta < 1.$$

Величину R_n можно написать въ такомъ видѣ:

$$R_n = \frac{\mu\cdot(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)(\mu-n)}{1\cdot 2\ldots n\cdot(n+1)} \cdot x^{n+1} \cdot (1+\theta x)^{\mu} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

Изъ входящихъ въ составъ R_n множителей — множитель $(1+\theta x)^{\mu}$ — конечный, множитель $\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}$ если только 0 и x отличны отъ нуля, имѣетъ своимъ предѣломъ 0, когда-

же θ или x равны нулю, то этотъ множитель обращается въ 1.

Остается множитель:

$$\frac{\mu \cdot (\mu-1)(\mu-2) \ldots (\mu-n)}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} \cdot x^{n+1}$$

какъ видно, этотъ множитель есть ничто иное, какъ общій членъ ряда (*), а такъ какъ при $x < 1$ этотъ рядъ *сходящійся*, то предѣлъ его общаго члена есть нуль; значитъ и предѣлъ разсматриваемаго множителя есть нуль, а слѣдовательно когда $0 \leq x < 1$ то пред. $R_n = 0$.
$n=\infty$

Когда-же x отрицательное, такъ что

$$-1 < x < 0,$$

то мы возьмемъ R_n въ формѣ Коши:

$$R_n = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} x^{n+1}(1-\lambda)^{n+1}(1+\lambda x)^{\mu-n-1}$$

и, положивъ $x = -z$, будемъ имѣть:

$$0 < z < 1$$

и R_n напишемъ въ такомъ видѣ:

$$R_n = (-1)^{n+1} \frac{(\mu-1)\ldots(\mu-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda z}\right)^{n+1} (1-\lambda z)^{\mu} \cdot z^{n+1}$$

Множитель $(1-\lambda z)^{\mu} \cdot z$ — конечный, въ § 70 показано, что множитель $\left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda z}\right)^{n+1}$ если только λ не равно нулю, имѣетъ

своимъ предѣломъ нуль, если-же $\lambda = 0$, то этотъ множитель обращается въ 1. Остается разсмотрѣть множитель:

$$\frac{\mu \cdot (\mu-1)(\mu-2) \ldots (\mu-n+1)(\mu-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \cdot z^n.$$

Написавъ его въ видѣ:

$$\frac{\mu \cdot (\mu-1)(\mu-2) \ldots (\mu-n+1) \cdot (\mu-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot (n+1)} \cdot (n+1) \cdot z^n \quad . \quad (**)$$

мы видимъ, что онъ представляетъ собою производную по z отъ функціи

$$\frac{\mu \cdot (\mu-1)(\mu-2) \ldots (\mu-n+1) \cdot (\mu-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot (n+1)} \cdot z^{n+1} \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

мы видѣли, что рядъ коего общій членъ представляется этою величиною обсолютно *сходящійся* при z меньшемъ 1; по доказанному въ § 57 слѣдуетъ, что и рядъ, составленный изъ производныхъ отъ его членовъ, сходящійся для тѣхъ-же значеній z; отсюда слѣдуетъ, что предѣлъ общаго члена (**) этого производнаго ряда есть ноль, когда $z < 1$.

Итакъ:

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}} R_n = 0$$

когда

$$0 < z < 1, \text{ т. е. } -1 < x < 0.$$

Такимъ образомъ когда

$$-1 < x < 1,$$

то всѣ перечисленныя въ § 66 условія имѣютъ мѣсто, и значитъ *имѣетъ мѣсто слѣдующее разложеніе:*

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1} \cdot x + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots$$

при всякомъ μ *положительномъ, отрицательномъ, цѣломъ или дробномъ.*

Эта формула и называется *биномомъ Ньютона* при всякомъ показателѣ, и рядъ второй части ея *биномiальнымъ.*

Обратимъ вниманіе на нѣкоторые простѣйшіе частные случаи этой формулы. Такъ пусть $\mu = \frac{1}{2}$, тогда:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1.2.3}\cdot x^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^4 + \ldots$$

замѣнивъ x на $-x$ имѣемъ:

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 - \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^4 - \ldots$$

Точно также при $\mu = -\frac{1}{2}$ имѣемъ:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1.2.}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{1.2.3}x^3 + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \ldots$$

и, замѣнивъ x на $-x$:

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \ldots$$

§ 73. Мы оставили безъ разсмотрѣнія тотъ случай, когда $x=-1$, и когда $x=+1$. Въ этомъ случаѣ тотъ признакъ, которымъ мы пользовались не даетъ сужденія о сходимости разсмотрѣннаго выше ряда, а значитъ и всѣ заключенія, которыя мы дѣлали о величинѣ предѣла R_n также отпадаютъ.

Приведемъ безъ доказательства относящіеся къ этимъ случаямъ результаты:

Биномiальный рядъ

$$1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots.$$

при $x=+1$ *обращается въ слѣдующій*

$$1+\frac{\mu}{1}+\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$$

этотъ послѣдній есть рядъ сходящійся когда $\mu>-1$, *и тогда сумма этого ряда есть* 2^μ.

При $x=-1$ *получается рядъ:*

$$1-\frac{\mu}{1}+\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}-\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$$

который есть рядъ сходящійся при $\mu>0$ *въ каковомъ случаѣ сумма его есть* 0 *и расходящійся если* $\mu<0$.

ГЛАВА IX.

О неопредѣленныхъ выраженіяхъ вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$ и пр.

§ 74. Иногда функціи отъ одной перемѣнной независимой x, при частномъ значеніи этой перемѣнной, принимаютъ видъ:

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad 0\cdot\infty;\quad 0^0;\quad 1^\infty \text{ и т. под.}$$

Въ такихъ случаяхъ нельзя, подставивъ вмѣсто x частное его значеніе, получить непосредственно значеніе функціи, и тогда поступаютъ слѣдующимъ образомъ: положимъ, что функція $f(x)$ принимаетъ неопредѣленный видъ при $x = a$, то дѣлаютъ сначала $x = a + \varepsilon$, и, предполагая ε безконечно-малымъ, переходятъ къ предѣлу $\varepsilon = 0$, т. е. ищутъ значеніе $\underset{\varepsilon=0}{\text{пред.}} f(a+\varepsilon)$. *Этотъ предѣлъ и принимаютъ за частное значеніе функціи $f(x)$ при $x = a$, т. е. полагаютъ равенство:*

$$f(a) = \underset{\varepsilon=0}{\text{пред.}} f(a+\varepsilon).$$

Для розысканія этого предѣла можно указать нѣкоторыя общія правила, къ изложенію которыхъ и перейдемъ.

§ 75. Разсмотримъ первую неопредѣленную форму $\frac{0}{0}$, къ которой можно свести и остальныя. Пусть будетъ дана функція

Неопредѣленныя выраженія вида $\frac{0}{0}$.

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

и положимъ что при $x = a$ будетъ

$$\varphi(a) = 0 \quad \text{и} \quad \psi(a) = 0$$

такъ что

$$f(a) = \frac{0}{0}.$$

Какъ уже сказано мы принимаемъ:

$$f(a) = \text{пред.} \frac{\varphi(a+\varepsilon)}{\psi(a+\varepsilon)}$$

По теоремѣ Тейлора будетъ:

$$\varphi(a+\varepsilon) = \varphi(a) + \varepsilon \cdot \varphi'(a) + \frac{\varepsilon^2}{1.2} \cdot \varphi''(a+\theta\varepsilon)$$

$$\varphi(a+\varepsilon) = \varphi(a) + \varepsilon \cdot \varphi'(a) + \frac{\varepsilon^2}{1.2} \cdot \varphi''(a+\lambda\varepsilon)$$

гдѣ θ и λ заключаются между 0 и 1. Слѣдовательно, замѣтивъ что $\varphi(a) = \psi(a) = 0$, будетъ:

$$f(a+\varepsilon) = \frac{\varepsilon.\varphi'(a) + \frac{\varepsilon^2}{1.2}.\varphi''(a+\lambda\varepsilon)}{\varepsilon\psi'(a) + \frac{\varepsilon^2}{1.2}.\psi''(a+\theta\varepsilon)} = \frac{\varphi'(a) + \frac{\varepsilon}{1.2}.\varphi''(a+\lambda\varepsilon)}{\psi'(a) + \frac{\varepsilon}{1.2}.\psi''(a+\theta\varepsilon)}$$

переходя къ предѣлу будемъ имѣть:

$$f(a) = \underset{\varepsilon=0}{\text{пред.}}\, f(a+\varepsilon) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

Такимъ образомъ имѣемъ теорему: *Если дробь* $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ *при* $x = a$ *обращается въ* $\frac{0}{0}$, *то для нахожденія ея величины можно ее замѣнить другою дробью* $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, *величина которой при* $x = a$ *будетъ таже самая какъ и первой.*

Если бы оказалось, что новая дробь $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ при $x = a$ принимаетъ также неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$, то, по предыдущей теоремѣ, ее можно замѣнить дробью $\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}$; если и эта дробь окажется принимающей видъ $\frac{0}{0}$, то можно взять $\frac{\varphi'''(x)}{\psi'''(x)}$ и т. д., вообще, ту изъ дробей $\frac{\varphi^{(n)}(x)}{\psi^{(n)}(x)}$, которая первая не принимаетъ неопредѣленнаго вида при $x = a$.

Нетрудно убѣдиться въ этомъ и непосредственно взявъ въ разложеніи числителя и знаменателя дроби $\frac{\varphi(a+\varepsilon)}{\psi(a+\varepsilon)}$ такое число членовъ n, чтобы обѣ или одна изъ производныхъ $\varphi^n(a)$ или $\psi^{(n)}(a)$ не равнялась нулю.

Примѣръ:

$$f(x) = \frac{2\cos x + x^2 - 2}{6e^x - 6x - 6 - 3x^2 - x^3}$$

найти величину этой дроби при $x = 0$.

Здѣсь

$$\varphi(x) = 2\cos x + x^2 - 2$$

$$\psi(x) = 6e^x - 6x - 6 - 3x^2 - x^3$$

очевидно $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.

Составляемъ $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$ и затѣмъ дѣлаемъ $x = 0$.

$$\varphi'(x) = -2\,\mathrm{Sin}\,x + 2x \qquad \varphi'(0) = 0$$
$$\psi'(x) = 6e^x - 6 - 6x - 3x^2 \qquad \psi'(0) = 0.$$

такъ какъ дробь

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

при $x = 0$ принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$, то составляемъ выраженія $\varphi''(x)$ $\psi''(x)$ и дѣлаемъ въ нихъ $x = 0$:

$$\varphi''(x) = -2\,\mathrm{Cos}\,x + 2 \qquad \varphi''(0) = 0$$
$$\psi''(x) = 6e^x - 6 - 6x \qquad \psi''(0) = 0$$

Дробь $\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}$ при $x = 0$ тоже принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$, поэтому составляемъ $\varphi'''(x)$, $\psi'''(x)$ и дѣлаемъ $x = 0$.

$$\varphi'''(x) = 2\,\mathrm{Sin}\,x \qquad \varphi'''(0) = 0$$
$$\psi'''(x) = 6e^x - 6 \qquad \psi'''(0) = 0$$

Составляемъ $\varphi^{\mathrm{IV}}(x)$ и $\psi^{\mathrm{IV}}(x)$

$$\varphi^{(\mathrm{IV})}(x) = 2\cos x \qquad \varphi^{(\mathrm{IV})}(0) = 2$$
$$\psi^{\mathrm{IV}}(x) = 6e^x \qquad \psi^{\mathrm{IV}}(0) = 6$$

значитъ

$$f(0) = \underset{x=0}{\text{пред.}}\ \frac{2\cos x}{6e^x} = \frac{1}{3}.$$

§ 76. Теорема подобная предыдущей имѣетъ мѣсто и для выраженій принимающихъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$. Въ самомъ дѣлѣ пусть заданная функція

Неопр. вида. $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

такова, что при $x = a$

$$\varphi(a) = \infty \quad \text{и} \quad \psi(a) = \infty$$

Но очевидно мы можемъ написать

$$f(x) = \frac{1}{\psi(x)} : \frac{1}{\varphi(x)},$$

или, обозначая

$$\frac{1}{\psi(x)} = \omega(x) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\varphi(x)} = \chi(x)$$

$$f(x) = \frac{\omega(x)}{\chi(x)}$$

причемъ при $x = a$ будетъ $\omega(a) = 0$, и $\chi(a) = 0$; слѣдовательно по предыдущему правилу имѣемъ:

$$f(a) = \underset{x=a}{\text{пред.}} \frac{\omega'(x)}{\chi'(x)}$$

но

$$\omega'(x) = \left(\frac{1}{\psi(x)}\right)' = -\frac{\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}$$

$$\chi'(x) = \left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)' = -\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}$$

слѣдовательно

$$f(a) = \underset{x=a}{\text{пред.}} \left\{\frac{\psi'(x)}{[\psi(x)]^2} : \frac{\varphi'(x)}{[(\varphi(x)]^2}\right\} = \underset{x=a}{\text{пред.}} \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} \cdot \text{пред.} \frac{[\varphi(x)]^2}{[\psi(x)]^2}$$

предполагая $f(a) = A$ и что A не равно ни 0 ни ∞, напишемъ предыдущее равенство такъ:

$$A = \text{пред.} \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} \cdot A^2 = A^2 \cdot \text{пред.} \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$$

отсюда слѣдуетъ

$$f(a) = A = \underset{x=a}{\text{пред.}} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II}$$

Нетрудно показать, что это равенство справедливо и въ томъ случаѣ когда $A = 0$, или $A = \infty$. Дѣйствительно, если $A = 0$, то возьмемъ функцію

$$f(x) + C = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} + C = \frac{\varphi(x) + C \cdot \psi(x)}{\psi(x)}$$

гдѣ C какая угодно постоянная, эта функція при $x = a$ принимаетъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$, истинное же ея значеніе есть C, ибо по предположенію $f(a) = 0$.

Примѣняя правило получимъ:

$$(f(x) + C) = \underset{x=a}{\text{пред.}} \frac{\varphi(x) + C\psi(x)}{\psi(x)} = \underset{x=a}{\text{пред.}} \frac{\varphi'(x) + C\psi'(x)}{\psi'(x)} =$$

$$= C + \underset{x=a}{\text{пред.}} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

отсюда слѣдуетъ, что формула

$$f(a) = \underset{x=a}{\text{пред.}} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$$

имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда $f(a) = 0$.

Когда $f(a) = A = \infty$, то стоитъ только взять обратную дробь $\frac{1}{f(x)} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$. По вышесказанному предѣлъ этой дроби при $x = a$ получится по формулѣ $\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$ и будетъ 0, а слѣдовательно предѣлъ данной дроби будетъ равенъ ∞ т. е. тотъ же какой даетъ формула:

$$f(a) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)},$$

Такимъ образомъ формула

$$f(a) = \underset{x=a}{\text{пред.}} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III}$$

имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда $\varphi(a) = \infty$ *и* $\psi(a) = \infty$ *каково-бы значеніе этой дроби ни оказалось.*

Примѣры: Найти предѣлъ функціи

$$f(x) = \frac{e^x}{x^n}$$

при $x = \infty$, предполагая что $n > 1$.

Здѣсь

$$\varphi(x) = e^x, \qquad \psi(x) = x^n$$

$$\varphi'(x) = e^x \qquad \psi'(x) = nx^{n-1}$$

при $x = \infty \quad \varphi'(x) = \infty$ и $\psi'(x) = \infty$

поэтому надо обратиться къ слѣдующимъ производнымъ и воспользоваться формулой

$$f(x) = \text{пред.}\ \frac{\varphi^{(k)}x)}{\psi^{(k)}(x)}$$

причемъ k есть наименьшее число, при которомъ по крайней мѣрѣ одна изъ этихъ производныхъ не обращается въ безконечность при $x = \infty$.

Если n число цѣлое, то стоитъ только взять $k = n$ то будетъ:

$$f(a) = \underset{x=\infty}{\text{пред.}}\ \frac{e^x}{n\,(n-1)\,\ldots\,2\,.\,1} = \infty\,.$$

Если-же n число дробное, то надо взять k равное ближайшему большему къ n цѣлому числу и мы также увидимъ, что будетъ

$$f(a) = \infty.$$

Совершенно также получимъ, что какіе-бы ни были положительные числа n и α, то

$$\underset{x=\infty}{\text{пред.}}\ \frac{e^{\alpha x}}{x^n} = \infty \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

и

$$\underset{x=\infty}{\text{пред.}}\ \frac{x^n}{e^{\alpha x}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (**)$$

Положимъ въ предыдущихъ формулахъ $x = \log z$ и $n = 1$, тогда будетъ $e^{\alpha x} = e^{\alpha \log z} = z^{\alpha}$, при $x = \infty$ будетъ очевидно и $z = \infty$ и формула (**) даетъ:

$$\underset{x=\infty}{\text{пред.}} \frac{x}{e^{\alpha x}} = \underset{z=\infty}{\text{пред.}} \frac{\log z}{z^{\alpha}} = 0.$$

Пусть $\log a = \alpha$, тогда $e^{\alpha} = a$ и $e^{\alpha x} = a^{x}$; формула (**) показываетъ, что

$$\underset{x=\infty}{\text{пред.}} \frac{a^{x}}{x^{n}} = \infty$$

каково-бы ни было число n и число $a > 1$.

§ 77. Если

Неопр. вида $0 . \infty$

$$f(x) = \varphi(x) . \psi(x)$$

и при $x = a$ $\varphi(a) = 0$ и $\psi(a) = \infty$, то, чтобы свести нахожденіе $f(a)$ къ предыдущимъ правиламъ, стоитъ только написать:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}} = \frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}},$$

такъ какъ, очевидно, что $\frac{1}{\psi(x)}$, при $x = a$ обращается въ 0 и первая дробь принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$, вторая дробь видъ $\frac{\infty}{\infty}$.

Примѣръ

$$f(x) = x^{n} . \log x \qquad n > 0$$

при $x = 0$.

Написавъ

$$f(x) = \frac{\log x}{\frac{1}{x^{n}}} = \frac{\log x}{x^{-n}}$$

и примѣняя правило имѣемъ:

$$f(0) = \underset{x=0}{\text{пред.}} \frac{(\log x)'}{(x^{-n})'} = \underset{x=0}{\text{пред.}} \frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-(n+1)}} = \text{пред.} \frac{x^{n}}{-n} = 0.$$

Такимъ образомъ

$$\underset{x=0}{\text{пред.}}\ (x^n \log x) = 0.$$

при всякомъ $n > 0$.

Неопр. вида 0°, ∞° 1^∞

§ 78. Если функція

$$f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)}$$

и при $x = a$ будетъ одновременно или:

$$\varphi(a) = 0 \quad \text{и} \quad \psi(a) = 0$$

или

$$\varphi(a) = \infty \qquad \psi(a) = 0$$

$$\varphi(a) = 1 \qquad \psi(a) = \infty,$$

то стоитъ только взять логариѳмъ заданной функціи, т. е.

$$\log [f(x)] = \psi(x) \,.\, \log [\varphi(x)],$$

чтобы неопредѣленности вида 0°, ∞° или 1^∞ свести къ неопредѣленности вида $0 \,.\, \infty$, раскрытіе которой уже показано. Найдя предѣлъ $\log f(a)$, найдемъ и само $f(a)$.

Примѣръ

$$f(x) = x^x \qquad \text{при } x = 0;$$

тогда

$$\log f(x) = x \,.\, \log x$$

при $x = 0$, какъ было показано, будетъ:

$$\text{пред.}\ (x \log x) = 0$$

значитъ $\log f(0) = 0$ и $f(0) = 1$, слѣдовательно

$$\underset{x=0}{\text{пред.}}\ x^x = 1.$$

§ 79. Если дана функція: Неопр. вида $\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{\lambda(x)}{\varphi(x)} - \frac{\mu(x)}{\psi(x)}$$

и при $x = a$ знаменатели $\varphi(a)$ и $\psi(a)$ обращаются въ нуль а числители остаются конечными, то функція принимаетъ видъ

$$\infty - \infty$$

но стоитъ только привести обѣ дроби къ одному знаменателю и сложить, то будетъ:

$$f(x) = \frac{\lambda(x) \cdot \psi(x) - \mu(x) \cdot \varphi(x)}{\varphi(x) \cdot \psi(x)}$$

т. е. получится такая дробь, которая принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$ и которой величина найдетъ по изложеннымъ въ предыдущихъ §§ правиламъ.

§ 80. Какъ видно разысканіе истинной величины разнаго рода выраженій принимающихъ неопредѣленный видъ приводится къ разысканію такой величины для выраженій вида $\frac{0}{0}$, для чего и показано въ § 75 общее правило.

Во многихъ случаяхъ, особенно тогда когда ищется истинная величина, которую имѣетъ заданная дробь для безконечномалыхъ значеній перемѣнной независимой x, иначе предѣлъ этой дроби когда $x = 0$, то выгоднѣе не пользоваться общимъ правиломъ § 75, а разложить числителя и знаменателя по степенямъ перемѣнной независимой и воспользоваться общею теоремою § 14.

Такъ напр. положимъ что надо найти истинное значеніе при $x = 0$ функціи:

$$f(x) = \frac{\left(x + \operatorname{Sin} 2x - 6 \operatorname{Sin} \frac{x}{2}\right)^2}{\left(4 + \operatorname{Cos} x - 5 \operatorname{Cos} \frac{x}{2}\right)^3}$$

Въ силу формулъ § 68 имѣемъ:

$$\text{Sin } 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + \ldots . \quad = 2x - \tfrac{4}{3}x^3 + \ldots$$

$$\text{Sin } \frac{x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{6} + \ldots . \quad = \frac{1}{2}x - \frac{1}{48}x^3 + \ldots$$

$$\text{Cos } x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots . \quad = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$\text{Cos } \frac{x}{2} = 1 - \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)}{1\cdot 2} + \ldots . \quad = 1 - \frac{1}{8}x^2$$

Подставляя, видимъ что въ числителѣ дроби первый членъ разложенія содержитъ x^3 въ знаменателѣ x^2, всѣ дальнѣйшія члены въ силу теоремы § 14 могутъ быть отброшены и мы получимъ

$$\underset{x=0}{\text{пред.}}\, f(x) = \text{пред.}\, \frac{\left[\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\right)x^3\right]^2}{\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right)x^2\right]^3} = 8\cdot\left(\frac{29}{3}\right)^2.$$

Разысканіе этого предѣла по правилу § 75 привело-бы къ гораздо болѣе сложнымъ выкладкамъ.

§ 81. Замѣтимъ въ заключеніе, что, *если функція нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ принимаетъ неопредѣленный видъ при частныхъ значеніяхъ этихъ перемѣнныхъ, то она не имѣетъ никакой опредѣленной величины.*

Напр. возьмемъ дробь

$$u = \frac{x}{x+y}$$

которая при $x=0$, $y=0$ принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$. Стоитъ только написать эту дробь такъ:

$$u = \frac{1}{1+\frac{x}{y}}$$

чтобы видѣть, что величина ея зависитъ отъ отношенія $\frac{y}{x}$, которое можетъ быть совершенно произвольнымъ и ничѣмъ не обусловленно, а значитъ и дробь можетъ принимать какую угодно величину.

Задачи.

Опредѣлить истинныя величины слѣдующихъ выраженій принимающихъ неопредѣленный видъ.

1) $y = \frac{ax^2 - 2acx + ac^2}{bx^2 - 2bcx + bc^2}$ при $x = c$. Отвѣтъ: $y = \frac{a}{b}$.

2) $y = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 - 1}$ при $x = 1$ $y = 2$.

3) $y = \frac{e^x - e^{\operatorname{Sin} x}}{x - \operatorname{Sin} x}$ при $x = 0$. $y = 1$.

4) $y = (1 - x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ при $x = 1$. $y = \frac{2}{\pi}$.

5) $y = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{Sin} x}{x^3}$ при $x = 0$. $y = \frac{1}{2}$.

6) $y = \frac{\operatorname{Cotg} x + \operatorname{Cosec} x - 1}{\operatorname{Cotg} x - \operatorname{Cosec} x + 1}$ при $x = \frac{\pi}{2}$. $y = 1$.

7) $y = \frac{x \operatorname{Sin} x - \frac{\pi}{2}}{\operatorname{Cos} x}$ при $x = \frac{\pi}{2}$. $y = -1$.

8) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1 + x)}$ при $x = 0$. $y = 2$.

9) $y = \frac{x^2 - a^2}{x^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}$ при $x = a$. $y = -\frac{4}{\pi}$

10) $y = \frac{\operatorname{Sin}^2 x \operatorname{Cos} x}{1 - \operatorname{Cos} x}$ при $x = 0$. $y = 2$.

ГЛАВА X.

Возрастаніе и убываніе функцій, ихъ наибольшія и наименьшія значенія.

§ 82. Мы ограничимся разсмотрѣніемъ функціи одной перемѣнной независимой. Въ § 20 уже было упомянуто, что функція называется *возрастающей* въ сопредѣльности съ даннымъ частнымъ значеніемъ перемѣнной независимой, когда съ увеличеніемъ значенія перемѣнной увеличивается и значеніе функціи, и съ уменьшеніемъ уменьшается, короче говоря, когда приращеніе функціи имѣетъ тотъ-же знакъ какъ и приращеніе перемѣнной независимой.

Если же знакъ приращенія функціи обратный знаку приращенія перемѣнной независимой, то функція называется *убывающей*.

Здѣсь необходимо обратить вниманіе на то, что возрастаніе и убываніе функціи разсматривается въ *сопредѣльности съ какимъ либо заданнымъ частнымъ значеніемъ перемѣнной независимой*, ибо та-же самая функція можетъ быть возрастающей вблизи однихъ частныхъ значеній перемѣнной и убывающей вблизи другихъ.

Положимъ для простоты, что заданная функція $F(x)$ остается вещественною при всякихъ значеніяхъ перемѣнной независимой x, тогда при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$ и функція вообще можетъ измѣняться или все время оставаясь возрастающей, или все время оставаясь убывающей или же будучи возрастающей въ однихъ промежуткахъ и убывающей въ другихъ. Если при этомъ значенія функціи остаются конечными, то ясно, что возрастая функція достигала нѣкотораго *наибольшаго* значенія послѣ котораго убываетъ и достигаетъ нѣкотораго *наименьшаго* значенія и т. д.

Спрашивается какимъ же образомъ для заданной функціи разграничить тѣ промежутки, внутри которыхъ она возрастаетъ или убываетъ, и найти тѣ частныя значенія перемѣнной независимой, которымъ соотвѣтствуютъ *наибольшія* или *наименьшія* значенія функціи. Для этого необходимо дать аналитическія признаки возрастанія и убыванія функцій.

Итакъ пусть будетъ задана какая угодно функція $F(x)$ и положимъ что она въ сопредѣльности съ частнымъ значеніемъ $x = a$ перемѣнной независимой непрерывна, тогда на основаніи предыдущихъ поясненій мы выскажемъ слѣдующія опредѣленія:

Опредѣленіе 1-е. *Функція $F(x)$ называется* **возрастающею** *при $x = a$ если разность $F(a+\varepsilon) - F(a)$ при всякомъ безконечно-маломъ ε будетъ одного знака съ ε.*

Наоборотъ *функція $F(x)$ называется* **убывающею** *при $x = a$, если сказанная разность обратнаго знака съ ε.*

Если функція $F(x)$ при $x = a$ имѣетъ *наибольшее* значеніе, то это значитъ, что значеніе $F(a)$ *больше всѣхъ съ нимъ смежныхъ* т. е.

$$F(a) > F(a+\varepsilon)$$

и

$$F(a) > F(a-\delta)$$

каковы бы ни были безконечно малыя величины ε и δ.

Отсюда слѣдуетъ, что въ этомъ случаѣ разность:

$$F(a+\varepsilon) - F(a) < 0$$

т. е. остается *отрицательною* при **всякомъ** безконечно маломъ ε. Точно также, если при $x = b$ функція $F(x)$ имѣетъ *наименьшее* значеніе, то разность

$$F(b+\varepsilon) - F(b) > 0$$

т. е. остается *положительной* при всякомъ безконечно маломъ ε.

Итакъ мы можемъ высказать слѣдующее опредѣленіе:

Опредѣленіе 2-е. *Функція* $F(x)$ *имѣетъ при* $x = a$ **наибольшую** *величину или дѣлается* **maximum**, *если разность* $F(a+\varepsilon) - F(a)$ *сохраняетъ отрицательный знакъ каковъ бы нибылъ знакъ безконечно-малой величины* ε.

Наоборотъ говорятъ, что *при* $x = a$ *функція* $F(x)$ *имѣетъ* **наименьшую** *величину или дѣлается* **minimum**, *если разность* $F(a+\varepsilon) - F(a)$ *имѣетъ положительный знакъ независимо отъ знака безконечно-малой* ε.

Укажемъ теперь тѣ аналитическіе признаки, по которымъ можно узнать будетъ ли $F(x)$ при $x = a$ возрастающей, убывающей, maximum или minimum. Для этого стоитъ только разложить разность $F(a+\varepsilon) - F(a)$ знакъ которой мы должны разобрать, въ рядъ по возрастающимъ степенямъ ε, воспользовавшись для этого теоремою Тейлора.

По этой теоремѣ имѣемъ:

$$F(a+\varepsilon) - F(a) = \frac{\varepsilon}{1} \cdot F'(a) + \frac{\varepsilon^2}{1.2} \cdot F''(a) + \ldots + \frac{\varepsilon^{n-1}}{1.2..(n-1)} F^{n-1}(a) + \frac{\varepsilon^n}{1.2...n} F^{(n)}(a+\theta\varepsilon) \quad . \quad (*)$$

причемъ

$$0 < \theta < 1.$$

Такимъ образомъ нашъ вопросъ приведенъ къ опредѣленію знака правой части равенства (*) при безконечно-малыхъ значеніяхъ ε.

Въ стоящемъ въ правой части равенства (*) ряду можно брать любое число членовъ т. е. полагать $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Нетрудно убѣдиться, что знакъ суммы всего ряда будетъ тотъ же самый, какъ у того члена этой суммы, въ которомъ ε входитъ въ наименьшей степени.

Если $F'(a)$ не ровно нулю то такимъ главнымъ членомъ и будетъ первый членъ нашего ряда т. е. $\frac{\varepsilon}{1} \cdot F'(a)$, если-же $F'(a) = 0$ и $F''(a)$ не равно нулю то главнымъ членомъ будетъ $\frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} \cdot F''(a)$ и т. д. Вообще главнымъ членомъ будетъ тотъ, который заключаетъ первую изъ тѣхъ производныхъ $F'(a)$, $F''(a)$, $F'''(a)$ . . . . которая не обращается въ ноль при $x = a$.

Дѣйствительно положимъ, что первая изъ неуничтожающихся при $x = a$ производныхъ будетъ порядка n, тогда будетъ:

$$F(a+\varepsilon) - F(a) = \frac{\varepsilon^n}{1.2 \ldots n} \cdot F^{(n)}(a+\theta\varepsilon). \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Изъ этой формулы получаются слѣдующія заключенія: **во первыхъ:** разность $F(a+\varepsilon) - F(a)$ будетъ измѣнять знакъ при измѣненіи знака у ε, когда n число *нечетное*.

Въ самомъ дѣлѣ при n нечетномъ ε^n мѣняетъ знакъ вмѣстѣ съ ε, а множитель $F^{(n)}(a+\theta\varepsilon)$ при достаточно маломъ ε будетъ того-же знака какъ и $F^{(n)}(a)$, ибо по предположенію эта величина не равна нулю.

Вмѣстѣ съ тѣмъ видно, что если

$$F^{(n)}(a) > 0$$

то вторая часть фор. (1), а слѣдовательно и первая одного знака съ ε значитъ функція $F(x)$ при $x = a$ будетъ **возрастающею.**

Если $F^{(n)}(a) < 0$, то вторая часть уравненія (1) будетъ имѣть знакъ обратный знаку у ε и слѣдовательно функція $F(x)$ при $x = a$ будетъ **убывающею.**

Во вторыхъ. Если n число четное то множитель ε^n сохраняетъ всегда положительный знакъ, будетъ ли само ε положительное или отрицательное, значитъ въ этомъ случаѣ и разность $F(a+\varepsilon) - F(a)$, будетъ сохранять свой знакъ неза-

висимо отъ знака ε. Этотъ знакъ разности будетъ плюсъ если $F^{(n)}(a) > 0$ и слѣдовательно тогда при $x = a$, $F(x)$ есть minimum

Если же $F^{(n)}(a) < 0$, то разность $F(a + \varepsilon) - F(a)$ будетъ постоянно отрицательной и слѣдовательно функція $F(x)$ при $x = a$ будетъ maximum.

Такимъ образомъ имѣемъ слѣдующія теоремы:

Теорема I. *При $x = a$ функція $F(x)$ будетъ возрастающею или убывающею, если первая изъ неуничтожающихся производныхъ: $F'(a)$, $F''(a)$, $F'''(a)$, ... $F^{(n)}(a)$ . . . будетъ* **нечетнаго** *порядка. Причемъ функція будетъ* **возрастающей** *если эта производная положительная* и **убывающей**, *если эта производная — отрицательная.*

Теорема II. *Чтобы при $x = a$ функція $F(x)$ была maximum, необходимо*: 1-е *чтобы первая производная этой функціи при $x = a$ обращалась въ нуль* т. е. *было бы*:

$$F'(a) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и во 2-хъ чтобы первая изъ неуничтожающихся при $x = a$ производная была порядка четнаго и при $x = a$ частное ея значеніе было бы отрицательное.

Теорема III. *Чтобы при $x = a$ функціи $F(x)$ была minimum необходимо*: *1-е чтобы первая производная ея при $x = a$ обращалась въ нуль* т. е. *было бы*:

$$F'(a) = 0$$

и во 2-хъ чтобы первая изъ производныхъ необращающихся въ нуль при $x = a$ была порядка четнаго и частное ея значеніе при $x = a$ было бы положительное.

Въ обыкновенномъ случаѣ первая изъ неуничтожающихся при $x = a$ производныхъ и будетъ первая т. е. $F'(a)$, поэтому функція будетъ возрастающей когда $F'(a) > 0$ и убы-

вающей когда $F'(a) < 0$, что весьма просто объяснить и геометрически, припомнивъ геометрическое значеніе первой производной.

Дѣйствительно построимъ кривую

$$y = F(x)$$

и взявъ на ней точку A соотвѣтствующаго абсциссѣ $x = a$ проведемъ въ ней касательную, тогда если эта касательная составляетъ съ осью x уголъ θ острый, функція возрастающая, если тупой—убывающяя, но $tg\theta = F'(a)$ и значитъ въ первомъ случаѣ будетъ $F'(a) > 0$, во второмъ $F'(a) < 0$. Нетрудно также видѣть, составивъ чертежъ что въ тѣхъ мѣстахъ гдѣ y становится наибольшимъ или наименьшимъ, касательная параллельна оси x т. е. $F'(a) = 0$.

§ 83. Когда дана функція

$$y = F(x)$$

и надо найти тѣ значенія x при которыхъ она становится max. или min. то въ силу теоремы II и III предыдущаго § надо поступать слѣдующимъ образомъ:

1-е. Найти первую производную

$$y' = F'(x)$$

и уравнять ее нулю. Получится уравненіе

$$F'(x) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Всѣ тѣ величины x при которыхъ y становится max. или min. находятся въ числѣ корней этого уравненія.

2-е. Уравненіе (1) рѣшить и найти **всѣ** его корни: пусть эти корни будутъ

$$a_1 \quad a_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a_k$$

такъ что

$$F'(a_1) = 0, \quad F'(a_2) = 0 \ldots . F'(a_k) = 0.$$

3. Чтобы различить который изъ корней соотвѣтствуетъ max. который min. и который ни тому ни другому, надо составить выраженіе второй производной

$$y'' = F''(x)$$

и сдѣлать въ ней x равнымъ тому корню, который хотимъ изслѣдовать напр. $x = a_1$; если окажется:

$F''(a_1) > 0$ то при $x = a_1$ y есть minimum

$F''(a_1) < 0$ то при $x = a_1$ y есть maximum

если же будетъ

$$F''(a_1) = 0$$

то надо составить выраженіе третьей производной

$$y''' = F'''(x)$$

и сдѣлать въ немъ $x = a_1$, если окажется, что $F'''(a_1)$ не равно 0, то при $x = a_1$, y не есть ни max. ни min., а будетъ возрастать если $F'''(a_1) > 0$ и убывать если $F'''(a_1) < 0$.

Если-же $F'''(a_1) = 0$, то надо составить $F^{IV}(a_1)$ и разсмотрѣть будетъ ли эта величина положительная, отрицательная или ноль, и продолжать такимъ образомъ пока не получится производная такого порядка, которая при $x = a_1$ въ ноль не обращается и тогда теорема I, II и III укажутъ имѣетъ ли мѣсто при $x = a_1$ maximum, minimum или ни то ни другое. Совершенно также надо изслѣдовать и остальные корни: a_2, a_3 . . . . a_k.

Примѣръ:

$$y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$$

тогда

$$y' = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$$

Уравниваемъ эту величину нулю, получаемъ для опредѣленія значеній x соотвѣтствующихъ max. или min. уравненіе:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Корни этого уравненія суть:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 3.$$

Составляемъ

$$y'' = 4(3x^2 - 12x + 11)$$

При $x = 1$

$$y'' = 4(3 - 12 + 11) = 8 > 0$$

значитъ при $x = 1$, $y = 3$ есть minimum.

При $x = 2$

$$y'' = 4(3 \cdot 4 - 12 \cdot 2 + 11) = -4 < 0.$$

значитъ при $x = -2$, y есть maximum.

При $x = 3$

$$y'' = 4(3 \cdot 9 - 12 \cdot 3 + 11) = 8 > 0$$

значитъ при $x = 3$, y есть minimum.

Для различенія maximum'а отъ minimum'а можно иногда и не прибѣгать къ составленію производныхъ высшихъ порядковъ, а ограничиться изслѣдованіемъ того мѣняетъ-ли первая производная при переходѣ черезъ нуль свой знакъ или нѣтъ.

Въ самомъ дѣлѣ если при $x = a$ функція $f(x)$ есть maximum то пока $x < a$, то $f(x)$ возрастаетъ и $f'(x)$ положительное, когда-же x станетъ больше a то функція $f(x)$ будетъ убывающая и $f'(x)$ станетъ отрицательной. При minimum'ѣ послѣдовательность знаковъ обратная.

Примѣръ:

$$y = \frac{x}{1 + x^2}$$

$$y' = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

Уравнивая нулю, имѣемъ

$$1 - x^2 = 0$$

$$x_1 = +1$$

$$x_2 = -1.$$

Очевидно что множитель $\frac{1}{(1 + x^2)^2}$ своего знака не мѣняетъ и остается постоянно положительнымъ, поэтому достаточно разсмотрѣть множителя

$$1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$$

Беру $x = +1$ и изслѣдую знакъ $1 - x^2$.
Если

$$x < +1 \quad \text{то} \quad 1 - x^2 > 0$$

$$x = +1 \qquad\quad 1 - x^2 = 0$$

$$x > +1 \qquad\quad 1 - x^2 < 0.$$

Какъ видно изъ этой таблицы при переходѣ x отъ значеній меньшихъ 1 къ значеніямъ большимъ 1, y' мѣняетъ свой знакъ съ $+$ на $-$, значитъ при $x = 1$, y есть maximum.

При $x = -1$ будетъ:

$$x < -1 \quad \text{то} \quad 1 - x^2 < 0$$
$$x = -1 \quad » \quad 1 - x^2 = 0$$
$$x > -1 \quad » \quad 1 - x^2 > 0.$$

Эта таблица показываетъ что при $x = -1$, y есть minimum.

Такимъ образомъ изложенныя правила даютъ рѣшеніе поставленнаго въ началѣ этой главы вопроса, о возрастаніи и убываніи функцій, и о разысканіи ихъ maximum'а и minimum'а.

§ 84. Во многихъ задачахъ на max. и min. функція, которой надо найти max. или min. бываетъ не задана непосредственно, а ее надо еще впередъ составить, тогда надо поступать слѣдующимъ образомъ: во 1-хъ, опредѣлить отъ сколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ зависитъ вопросъ, во 2-хъ выбрать эти перемѣнныя независимыя между различными перемѣнными задачи, въ 3-хъ составить по условіямъ вопроса ту функцію избранныхъ перемѣнныхъ max. или min. которой надо найти, и затѣмъ поступать по изложеннымъ выше правиламъ.

Можетъ случится, что другая болѣе простая функція дѣлается max. или min. одновременно съ составленной напр. $k \cdot f(x)$ гдѣ k любое положительное число, $[f(x)]^k$, $\log.[f(x)]$ и проч., тогда надо взять эту послѣднюю функцію чтобы выкладки были проще.

Примѣръ: Изъ всѣхъ равнобедренныхъ треугольниковъ съ даннымъ периметромъ $2p$ найти тотъ, площадь котораго наибольшая.

Вопросъ, какъ нетрудно видѣть, зависитъ отъ *одной* перемѣнной независимой, если за эту перемѣнную x принять длину основанія, то длины другихъ двухъ сторонъ будутъ $p - \frac{x}{2}$ и $p - \frac{x}{2}$ и площадь S выразится такъ:

$$S = \sqrt{p \cdot (p - x) \cdot \tfrac{x}{2} \cdot \tfrac{x}{2}} = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{p} \cdot x \cdot \sqrt{p - x}$$

вмѣсто этой функціи выгоднѣе взять $\left(\frac{2S}{\sqrt{p}}\right)^2$ которая одновременно съ S будетъ max. т. е. взять

$$y = x^2(p - x)$$

тогда

$$y' = 2x(p - x) - x^2 = 2px - 3x^2$$

x опредѣлится изъ уравненія

$$2px - 3x^2 = 0$$

коего корни суть

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = \frac{2p}{3}$$

первый корень соотвѣтствуетъ minimum'у, второй maximum'у и показываетъ, что искомый треугольникъ равносторонній.

§ 85. При рѣшеніи задачъ на разысканіе наибольшихъ и наименьшихъ значеній функціи, особенно такихъ, когда эта функція не задана непосредственно, а ее надо составить по условіямъ задачи, часто бываетъ выгодно ввести вспомогательныя перемѣнныя, между которыми по условіямъ задачи установится рядъ соотношеній. Понятно, что если число этихъ соотношеній единицею меньше числа перемѣнныхъ, то вопросъ въ сущности зависитъ отъ одной перемѣнной и значитъ рѣшеніе его можетъ быть достигнуто по изложеннымъ выше правиламъ.

Такъ напр. положимъ, что требуется *на данной кривой, уравненіе которой*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

найти тѣ точки M и N разстояніе коихъ до начала координатъ наибольшее и наименьшее.

Обозначая черезъ r сказанное разстояніе и черезъ x и y координаты искомой точки, имѣемъ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Это и есть та функція, maximum и minimum которой надо найти. Но x и y не суть обѣ перемѣнныя независимыя а лишь одна изъ нихъ, ибо искомыя точки должны лежать на данной кривой (1), значитъ и координаты ея должны удовлетворять уравненію этой кривой, т. е. между x и y имѣетъ мѣсто зависимость

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Понятно, что можно бы было принять напр. x за перемѣнную независимую, рѣшить уравненіе (1) относительно y, найденное значеніе подставить въ уравненіе (2), тогда r выразится какъ функція одной только перемѣнной x, и значитъ maximum и minimum этой функціи могутъ быть найдены по изложеннымъ выше правиламъ.

Но такое рѣшеніе потребуетъ часто сложныхъ выкладокъ, поэтому удобнѣе поступать иначе.

И такъ пусть имѣется функція

$$V = F(x, y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

для которой надо найти maximum и minimum, причемъ x и y связаны соотношеніемъ:

$$f(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Вообразимъ что уравненіе (4) рѣшено относительно y и найденное значеніе его подставлено въ уравненіе (3), тогда V, будетъ *сложною* функціею перемѣнной x.

Чтобы найти тѣ значенія x, при которыхъ V обращается

въ *maximum* или *minimum* надо уравнять нулю производную V'.

По правилу о производныхъ сложныхъ функцій имѣемъ:

$$V' = F'_x + y' \cdot F'_y$$

Отсюда слѣдуетъ уравненіе:

$$F'_x + y' \cdot F'_y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Величина производной y', входящей въ это уравненіе можетъ быть найдена и не рѣшая уравненія (4), а разсматривая y какъ неявную функцію этимъ уравненіемъ опредѣляемую.

Именно будетъ:

$$f'_x + y' \cdot f'_y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

откуда слѣдуетъ:

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

и подставляя въ уравненіе (5), по приведеніи имѣемъ:

$$F'_x \cdot f'_y - F'_y \cdot f'_x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Такимъ образомъ мы можемъ сказать, что тѣ значенія x и y, которыя обращаютъ V въ maximum или minimum опредѣляются уравненіями:

$$F'_x f'_y - F'_y f'_x = 0$$

и

$$f(x, y) = 0.$$

Совмѣстное рѣшеніе этихъ уравненій и доставитъ требуемыя значенія. Совершенно подобнымъ же образомъ слѣдуетъ поступать и при большемъ числѣ перемѣнныхъ.

Такъ напр. если-бы были даны:

$$V = F(x, y, z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

та функція maximum и minimum которой ищется и

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) &= 0 \\ \varphi(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

тѣ уравненія, называемыя *условными*, которыя связываютъ перемѣнныя x, y, z, то вообразимъ, что x принято за перемѣнную независимую, тогда y и z могутъ быть найдены изъ уравненія (9), ихъ значенія подставлены въ уравненіе (8) послѣ чего V станетъ *сложною* функціею одной перемѣнной независимой x.

Для нахожденія искомыхъ значеній x надо составить уравненіе $V' = 0$. По правилу-же о производной сложной функціи будетъ:

$$V' = F'_x + y' F'_y + z' F'_z$$

Значитъ будетъ:

$$F'_x + y' F'_y + z' F'_z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Но входящія сюда производныя y' и z' могутъ быть опредѣлены и не рѣшая уравненій (9), по правилу о дифференцированіи неявныхъ функцій — именно будетъ:

$$\left.\begin{aligned} f'_x + y' f'_y + z' f'_z &= 0 \\ \varphi'_x + y' \varphi'_y + z' \varphi'_z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Опредѣливъ изъ уравненій (11) величины y' и z', подставляемъ ихъ въ уравненіе (10), которое будетъ тогда заключать только буквы x, y, z и значитъ будетъ вида

$$\psi(x, y, z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Это уравненіе будучи присоединено къ уравненію (9) и доставитъ тѣ значенія x, а также и вспомогательныхъ перемѣнныхъ y и z, при которыхъ V имѣетъ maximum или minimum.

Постараемся-же теперь высказать общее правило какъ должно поступать въ подобномъ случаѣ.

Для этого стоитъ только обратить вниманіе, какимъ образомъ составлены уравненія (10), (11) и ихъ слѣдствіе (12).

Одна изъ перемѣнныхъ x принята за независимую, другія *двѣ* y и z за неявныя ея функціи опредѣляемыя *условными* уравненіями (9).

Составивъ производную отъ той функціи V, maximum или minimum которой ищется, разсматривая ее какъ сложную функцію x, уравниваемъ эту производную нулю. Это дало уравненіе (10). Дифференцируя условныя уравненія составляемъ, уравненія служащія для опредѣленія производныхъ y' и z' — получили уравненія (11).

Рѣшить уравненія (11) относительно y' и z' и найденныя величины *подставить* въ уравненіе (10) значитъ — **исключить** изъ уравненій (10) и (11) величины y' и z', производныхъ вспомогательныхъ перемѣнныхъ. Это то исключеніе и доставило то уравненіе (12), которое будучи присоединено къ условнымъ и даетъ искомыя значенія x, y, z.

Такимъ образомъ мы имѣемъ слѣдующее общее правило:

Если задана функція

$$V = F(x,\ y,\ z,\ \ldots\ t) \quad \ldots \quad \text{(I)}$$

отъ n перемѣнныхъ независимыхъ x, y, z, $\ldots$ t *связанныхъ между собою* $(n-1)$ *условіями*:

$$\left.\begin{aligned} F(x,\ y,\ z,\ \ldots\ t) &= 0 \\ \varphi(x,\ y,\ z,\ \ldots\ t) &= 0 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots & \\ \omega(x,\ y,\ z,\ \ldots\ t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(II)}$$

то чтобы найти тѣ значенія перемѣнныхъ, при которыхъ V обращается въ max. или min. надлежитъ: 1-е) принять одну изъ перемѣнныхъ напр. x за независимую, а остальныя за неявныя ея функціи, составить производную $\frac{dV}{dx}$ *и уравнять ее нулю. 2-е) Продифференцировавъ уравненія II составить систему уравненій первой степени служащую для опредѣленія производныхъ:* y', z', ... t'. *3-е) Изъ этой системы и уравненія* $\frac{dV}{dx} = 0$ *исключить производныя* y', z', ... t' *вспомогательныхъ перемѣнныхъ; въ результатѣ этого исключенія получится одно уравненіе вида:*

$$\psi\,(x,\ y,\ z,\ \ldots .\ t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

4-е) Это уравненіе, будучи присоединено къ $n-1$ *условнымъ уравненіямъ (II), составитъ съ ними систему* n *уравненій, изъ которыхъ и найдутся тѣ частныя значенія* n *перемѣнныхъ* x, y, z, ... t, *при которыхъ V имѣетъ max или min.*

Приложимъ теперь это правило къ примѣру приведенному въ началѣ этого §.

Очевидно, что вмѣсто того чтобы искать max. и min. функціи $r = \sqrt{x^2+y^2}$ можно взять $r^2 = x^2 + y^2$, которое имѣетъ max. и min. при тѣхъ же самыхъ значеніяхъ какъ и r.

Итакъ будетъ:

$$V = x^2 + y^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

Условное уравненіе только одно.

$$Ax^2 + 2\,Bxy - Cy^2 - H = 0 \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

Дифференцируя I и II, по сокращеніи на 2 имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{c} x + y\ y' = 0 \\ (Ax + By) + (Bx + Cy)\ y' = 0 \end{array}\right\} \quad (*)$$

Чтобы изъ уравненій (*) исключить y' стоитъ только написавъ ихъ въ видѣ:

$$x = -\,y\,y'$$

$$Ax + By = -\,(Bx + Cy)\,y'$$

раздѣлить одно на другое. Получится:

$$\frac{Ax + By}{x} = \frac{Bx + Cy}{y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{Ш}).$$

Это уравненіе будучи рѣшено совмѣстно съ уравненіемъ (II) и доставить требуемыя значенія x и y.

Чтобы выполнить это рѣшеніе уравненій II и Ш, примѣнимъ слѣдующій пріемъ, который прилагается ко многимъ задачамъ подобнаго рода.

Уравненіе III можно разсматривать какъ равенство двухъ отношеній

$$\frac{Ax + By}{x} \quad \text{и} \quad \frac{Bx + Cy}{y}$$

обозначимъ общую ихъ величину черезъ λ, тогда получимъ уравненія:

$$\frac{Ax + By}{x} = \frac{Bx + Cy}{y} = \lambda \quad . \quad . \quad . \quad (**)$$

изъ которыхъ слѣдуетъ такія два:

$$\left.\begin{aligned} (A - \lambda)\,x + By &= 0 \\ Bx + (C - \lambda)\,y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III}'.$$

Эти уравненія, вторыя части коихъ суть O имѣютъ рѣшеніе $x = o$ и $y = o$, но это рѣшеніе не удовлетворяетъ уравненіе (II) и значитъ не годится; чтобы уравненія (III′)

допускали рѣшенія отличныя отъ 0, надо чтобы уравненія

$$A - \lambda + B\frac{y}{x} = 0$$
$$B + (C - \lambda)\frac{y}{x} = 0$$

изъ нихъ слѣдующія были совмѣстныя т. е. чтобы было:

$$(A - \lambda)\ (C - \lambda) - B^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (IV)$$

иначе:

$$\lambda^2 - (A + C)\ \lambda + A\ C - B^2 = 0$$

Отсюда слѣдуетъ

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{A+C}{2} + \tfrac{1}{2}\ \sqrt{(A-C)^2 + 4\ B^2} \\ \lambda_2 &= \frac{A+C}{2} - \tfrac{1}{2}\ \sqrt{(A-C)^2 + 4\ B^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (V).$$

Взявъ сперва $\lambda = \lambda_1$ и подставляя въ одно изъ уравненій (III) (безразлично въ которое ибо при этомъ значеніи λ эти уравненія совмѣстныя и значитъ одно изъ нихъ есть слѣдствіе другого) напр. въ первое получимъ

$$y = -\ \frac{A - \lambda_1}{B} \cdot x$$

и подставивъ въ уровненіе II получимъ для опредѣленія x квадратное уравненіе, рѣшеніе котораго дастъ двѣ величины для x:

$$x = x_1 \text{ и } y =$$
$$x = x_2$$

Имъ соотвѣтствуетъ:

$$y_1 = -\ \frac{A - \lambda_1}{B}\ x_1$$

и

$$y_2 = - \frac{A - \lambda_1}{B} \cdot x_2$$

Совершенно также взявъ затѣмъ $\lambda = \lambda_2$ найдемъ двѣ пары значеній (x_3 y_3) и (x_4 и y_4).

Если мы желаемъ знать соотвѣтствующія величины V, то очевидно будетъ напр.

$$V_1 = x_1^2 + y_1^2$$

и т. д. Часто именно эти значенія и требуются, — ихъ можно найти не находя предварительно x_1 и y_1 x_2 и y_2 и пр., а лишь рѣшивъ уравненіе IV.

Въ самомъ дѣлѣ возьмемъ уравненіе (**)

$$\frac{Ax + By}{x} = \frac{Bx + Cy}{y} = \lambda$$

и умножимъ числителя и знаменателя дроби на x, и второй дроби на y получимъ:

$$\frac{Ax^2 + Bxy}{x^2} = \frac{Bxy + Cy^2}{y^2} = \lambda$$

откуда слѣдуетъ:

$$\frac{Ax^2 + 2\ Bxy + Cy^2}{x^2 + y^2} = \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (***)$$

Но въ силу уравненія II имѣемъ:

$$Ax^2 + 2\ Bxy + Cy^2 = H$$

Слѣдовательно уравненіе (***) можетъ быть написано такъ:

$$\frac{H}{x^2 + y^2} = \lambda$$

иначе.

$$x^2 + y^2 = \frac{H}{\lambda}$$

значитъ будетъ:

$$V_1 = V_2 = x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = \frac{H}{\lambda_1}$$

и

$$V_3 = V_4 = x_3^2 + y_3^2 = x_4^2 + y_4^2 = \frac{H}{\lambda_2}$$

Въ этой задачѣ легко различить непосредственно, что большему корню уравненія (IV) соотвѣтствуетъ minimum V, меньшему — maximum.

Изложеніе же признаковъ служащихъ для того, чтобы въ общемъ случаѣ различать max. и min. въ подобнаго рода вопросахъ, также какъ и разысканіе max. и min. функцій отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ не входитъ въ объемъ нашего курса.

Задачи:

Опредѣлить max. или min. слѣдующихъ функцій:

1) $$y = x - x^2$$

Отвѣтъ: при $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{4}$ — max.

2) $$y = x^4 - 8\,x^3 + 22\,x^2 - 24\,x + 12$$

Отвѣтъ: При $x = 1$ y есть minimum

» $x = 2$ y » maximum

» $x = 3$ y » minimum

3) $$y = x^5 - 5\,x^4 + 5\,x^3 + 1$$

Отвѣтъ: При $x = 0$ y не есть ни max. ни min.

» $x = 1$ y есть maximum

» $x = 3$ y » minimum

4) $y = (x - a)^n$ (n цѣлое число)

Отвѣтъ: При $x = a$ y есть minimum если n четное

y не есть ни max. ни min. если n нечетное.

5) $y = x^m (a - x)^n$

Отвѣтъ: При $x = 0$: y есть min. если m четное

y ни max. ни min. если m нечетное

$x = a$: y есть min. если n четное

ни max. ни min. если n нечетное.

$x = \frac{m a}{m + n}$: y есть maximum.

6) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$:

Отвѣтъ: $x = 0$ y — maximum

$x = 2$ y — minimum.

7) $y = \frac{(x - 1)^2}{(x + 1)^3}$

Отвѣтъ: При $x = 5$ y : есть maximum

$x = 1$ y : есть minimum.

8) $y = \frac{x^2}{(a^2 + x^2)^3}$

Отвѣтъ: При $x = \sqrt{\frac{a}{2}}$ y есть maximum.

Къ этому выраженію приводитъ рѣшеніе слѣдующей задачи: на какой высотѣ надо помѣстить источникъ свѣта, чтобы освѣщеніе малой горизонтальной площадки, разстояніе которой отъ горизонтальной проекціи свѣтящейся точки есть a было наибольшимъ.

9) Зная что прочность бруса прямоугольнаго сѣченія пропорціональна его ширинѣ и квадрату его высоты, опредѣлить размѣръ поперечнаго сѣченія бруса наибольшей прочности, который можно втесать изъ круглаго бревна, діаметръ коего есть a.

Отвѣтъ: Ширина бруса $x = \sqrt{\frac{a}{3}}$.

10) Данъ объемъ открытаго сверху цилиндрическаго сосуда опредѣлить его размѣры (радіусъ основанія и высоту), такъ чтобы поверхность его была наименьшая.

Отвѣтъ: Радіусъ основанія долженъ быть равенъ высотѣ цилиндра.

11) Даны длины сторонъ четырехъ-угольника: a, b, c и d составить изъ нихъ четырехъ-угольникъ наибольшей площади.

Отвѣтъ: Искомый четырехъ-угольникъ долженъ быть таковъ чтобы около него можно было описать окружность, т. е. что сумма противулежащихъ угловъ его есть 180°.

12) При какомъ положеніи относительно солнца планета Венера представляется наиболѣе яркою? Орбиту Венеры можно принять лежащей въ плоскости эклиптики и круговою, и яркость пропорціональною площади видимый фазы и обратно пропорціональною квадрату разстоянія до земли.

Отвѣтъ: Обозначая черезъ a разстояніе отъ солнца (S) до земли (T), черезъ b отъ солнца до Венеры (V) и черезъ x отъ Венеры до земли, то надо найти maximum функціи:

$$\frac{(x+b)^2 - a^2}{x^3}$$

что имѣетъ мѣсто при $x = -2b + \sqrt{b^2 + 3a^2}$.

При $a = 1$; $b = 0{,}72333$; $x = 0{,}43036$, будетъ уголъ $STV = 39^\circ\,43'$.

13) Уравненіе времени выражается въ зависимости отъ средней долготы солнца слѣдующею приближенною формулою

$$u = 7{,}7^m \cdot \mathrm{Sin}\ (x + 79^\circ) - 9{,}5^m \cdot \mathrm{Sin}\ 2x$$

гдѣ x есть средняя долгота солнца.

Опредѣлить наибольшія и наименьшія значенія уравненія времени и въ какіе дни года они имѣютъ мѣсто.

Рѣшеніе. Уравнявъ нулю производную u' имѣемъ для опредѣленія величины x уравненіе:

$$7{,}7\ \mathrm{Cos}\,(x + 79^\circ) - 19\ \mathrm{Cos}\ 2x = 0$$

иначе:

$$0{,}405\ \mathrm{Cos}\,(x + 79^\circ) - \mathrm{Cos}\ 2x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Если положилъ $\mathrm{Sin}\ x = z$, то для опредѣленія z получится уравненіе 4-й степени, не приводящееся къ квадратному, и значитъ не рѣшаемое по правиламъ элементарной алгебры. Поэтому мы будемъ рѣшать по приближенію уравненіе (1) не преобразовывая его.

Прежде всего опредѣлимъ тѣ границы внутри которыхъ могутъ заключаться значенія x удовлетворяющія уравненію (1).

Такъ какъ $\mathrm{Cos}\,(x + 79^\circ)$ всегда заключается между -1 и $+1$ то $\mathrm{Cos}\ 2x$ должно заключаться между $-0{,}405$ и $+0{,}405$, т е. должно быть:

$$-0{,}405 < \mathrm{Cos}\ 2x < 0{,}405 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Принявъ точку A (черт. 14) за начало дугъ, отложивъ отъ точки O длины $OB = OC = 0{,}405\ OA$ и проведя перпендикуляры $M\,Q$ и $N\,P$ получимъ на окружности точки M, N, P и Q.

Конецъ дуги $2x$ долженъ лежать или между точками M и N или между точками P и Q, чтобы неравенство (3) могло имѣть мѣсто:

Но дуга $AM = \arccos 0{,}405 = 66°$.

Значитъ должно быть:

1) $$66° < 2x < 180° - 66°,$$

т. е. $33° < x < 57°$.

2) $$180° + 66° < 2x < 360° - 66°,$$

т. е. $123° < x < 147°$.

3) $$360° + 66° < 2x < 360° + (180° - 66°),$$

т. е. $213° < x < 236°$.

4) $$360° + (180° + 66°) < 2x < 720° - 66°,$$

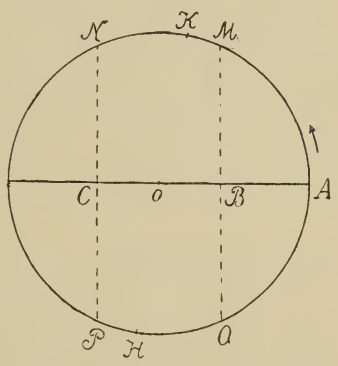
т. е. $303° < x < 327°$.

Такимъ образомъ x надо только искать въ каждомъ изъ намѣченныхъ промежутковъ.

Возьмемъ первый промежутокъ

$$33° < x < 57°$$

Черт. 14.



и обозначимъ черезъ $f(x)$ функцію

$$f(x) = 0{,}405\,(x + 79°) - \operatorname{Cos} 2x$$

(Очевидно что $f(x) = \frac{1}{19} \cdot u'$).

Взявъ производную $f'(x)$ видимъ что будетъ

$$f'(x) = -\,0,\ 405\ \operatorname{Sin}(x + 79°) + 2\ \operatorname{Sin} 2x$$

и пока x измѣняется отъ $33°$ до $57°$ $f'(x)$ все время остается *положительной*, значитъ $f(x)$ все время *возрастаетъ*, а такъ

какъ $f(33^\circ) < 0$ и $f(57^\circ) < 0$ то въ промежутокъ отъ $x = 33^\circ$ до $x = 57^\circ$ находится *одинъ* и *только одинъ* корень функціи $f(x) = 0$.

Чтобы найти приближенную величину этого корня дѣлаемъ $x = \frac{33^\circ + 57^\circ}{2} = 45^\circ$ и состовляемъ $f(45^\circ)$ будетъ:

$$f(45^\circ) = 0{,}405 \cdot \mathrm{Cos}\,(124^\circ) - \mathrm{Cos}\ 90^\circ = -\ 0{,}23.$$

а такъ какъ $f(57^\circ) < 0$ то $45^\circ < x < 57^\circ$.

Беремъ $x = \frac{45^\circ + 57^\circ}{2} = 51^\circ$, и вычисляемъ

$$f(x) = 0{,}405 \cdot \mathrm{Cos}\ 130^\circ - \mathrm{Cos}\ 102^\circ =$$

$$-\ 0{,}260 + 0{,}208 = -\ 0{,}052$$

значитъ

$$51^\circ < x < 57^\circ.$$

Чтобы получить быстрѣе болѣе близкую величину x, которая какъ видно близка къ 51°, можно воспользоваться теоремою Тейлора. Обозначимъ для краткости $51^\circ = \alpha$ и пусть искомое значеніе x есть $x = \alpha + h$ тогда должно быть:

$$f(\alpha + h) = 0$$

но

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + hf'(\alpha) + \ \ldots\ .$$

отсюда слѣдуетъ:

$$h = -\ \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

но

$$f'(\alpha) = -\ 0{,}405\ \mathrm{Sin}\ 130^\circ + 2\ \mathrm{Sin}\ 102^\circ = -\ 0{,}310 +$$

$$+\ 1{,}850 = +\ 1{,}54$$

значитъ

$$h = \frac{0{,}052}{1{,}54} = 0{,}0337 = 1^\circ{,}93$$

слѣдовательно надо взять

$$x = 51^\circ + 1^\circ,97 = 51^\circ\ 56'$$

и такъ какъ при этомъ значеніи x величина $f'(x) = \frac{1}{19}\ u'$ положительная, то и $u'' > 0$, значитъ при $x = 52^\circ\ 56'$ u имѣетъ minimum, именно:

$$u = 7,7 \cdot \mathrm{Sin}\,(131^\circ\ 56') - 9,5^{m}\ \mathrm{Sin}\ 105^\circ\ 52^\circ$$
$$= 5,2 - 8,7 = -\ 3,5 \text{ минуты.}$$

Чтобы разсчитать въ какой день года это будетъ надо замѣтить, что въ моментъ весенняго равноденствія средняя долгота солнца есть нуль и за 360° дней измѣняется равномѣрно на 360°. Значитъ солнце имѣетъ долготу 52° 56′ (кругло 53°) черезъ $\frac{365}{360} \cdot 53 = 54$ дня послѣ весенняго равноденствія, т. е. 2/15 Мая. Взявъ Almanac нетрудно убидится что въ этото день уровненіе времени дѣйствительно имѣетъ minimum.

Рекомендуется совершенно подобнымъ-же образомъ вычислить остальные три корня.

Этотъ примѣръ приведенъ, чтобы показать какимъ-образомъ надо поступать въ тѣхъ случаяхъ когда элементарная алгебра не даетъ способовъ для рѣшенія встрѣчающагося въ вопросѣ уравненія, и надо его рѣшать по приближенію.

ГЛАВА XI.

Простѣйшія геометрическія приложенія дифференціальнаго исчисленія.

Касательная къ плоскимъ кривымъ.

§ 86 Въ § 20 упомянуто, что задача о проведеніи касательной къ плоской кривой иначе задача о составленіи уравненія касательной въ данной на кривой точкѣ, когда дано урав-

неніе самой кривой, привела къ понятію о производной и къ открытію дифференціальнаго исчисленія.

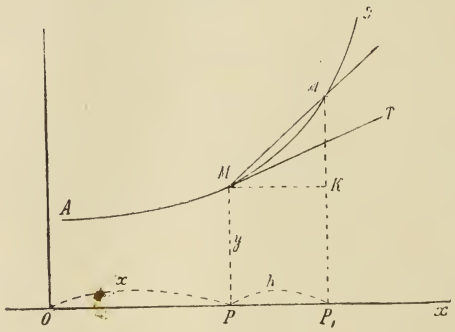
Въ этой главѣ мы и займемся нѣсколько подробнѣе изученіемъ этой задачи.

Итакъ положимъ, что дана (черт. 15) плоская кривая AB уравненіе которой въ прямолинейныхъ и прямоугольныхъ координатахъ есть

$$y = f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и пусть на этой кривой взята точка M, координаты которой суть $x = OP$ и $y = f(x) = PM$.

Черт. 15.



Требуется составить уравненіе касательной къ этой кривой въ данной на ней точкѣ M.

Напомнимъ во первыхъ общее опредѣленіе касательной въ данной на кривой точкѣ, а именно:

Касательною въ данной точкѣ кривой называется предѣльное положеніе перемѣнной сѣкущей проведенной черезъ эту точку, когда вторая ея точка пересѣченія съ кривою неопредѣленно приближается къ первой.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что для полученія уравненія касательной стоитъ только составить уравненіе сѣкущей MM_1, проведенной черезъ данную точку M и безконечно близкую къ ней M_1, и опредѣлить предѣльное ея положеніе.

Обозначая черезъ x_1 и y_1 координаты точки M_1 и черезъ ξ и η координаты произвольной точки на сѣкущей MM_1, по извѣстному изъ аналитической геометріи правилу можемъ сразу написать ея уравненіе, а именно:

$$\frac{\xi - x}{x_1 - x} = \frac{\eta - y}{y_1 - y}$$

или иначе

$$\eta - y = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}(\xi - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Но разность $x_1 - x = PP_1$ представляетъ собою приращеніе абсциссы x, когда мы на данной кривой вмѣсто точки M возьмемъ точку M_1, точно также разность $y_1 - y$ представляетъ собою приращеніе ординатъ, т. е.

$$x_1 - x = \Delta x$$
$$y_1 - y = \Delta y$$

и значитъ уравненіе (2) можно писать такъ:

$$\eta - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(\xi - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2^1)$$

Чтобы получить уравненіе касательной стоитъ только перейти къ предѣлу, предполагая что Δx и Δy безконечно малыя, но какъ извѣстно

$$\text{пред.}\frac{\Delta x}{\Delta y} = y' = f'(x)$$

значитъ искомое уравненіе касательной будетъ:

$$\eta - y = y'(\xi - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Это уравненіе можно было-бы написать и сразу основываясь на показанномъ въ § 20 геометрическомъ значеніи произ-

водной — представляющей тангенсъ угла наклоненія касательной къ оси абсциссъ.

Въ самомъ дѣлѣ обозначая этотъ уголъ черезъ α, видимъ что касательная представляетъ собою прямую проходящую черезъ данную точку M и составляющую уголъ α съ осью x-овъ.

Уравненіе такой прямой есть:

$$\eta - y = (\xi - x) \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

а такъ какъ

$$\operatorname{tg} \alpha = y'$$

то и получаемъ:

$$\eta - y = y'(\xi - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

или иначе:

$$\eta - y = (\xi - x) \cdot f'(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3').$$

Примѣръ. Пусть уравненіе данной кривой есть

$$y = x^2 + x + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

найти уравненіе касательной къ ней точкѣ абсцисса коей $x = 2$.

Во-первыхъ по уравненію (*) вычисляемъ соотвѣтствующую данной абсциссѣ ординату имѣемъ:

$$y = 2^2 + 2 + 1 = 7.$$

Итакъ координаты точки касанія суть:

$$x = 2; \; y = 7.$$

Затѣмъ составивъ выраженіе производной:

$$y' = 2x + 1$$

полагаемъ въ немъ $x = 2$ и получаемъ

$$y' = 5.$$

подставляя эти величины въ общее уравненіе касательной имѣемъ:

$$\eta - 7 = 5(\xi - 2)$$

иначе:

$$\eta = 5\xi - 3.$$

§ 87. При выводѣ уравненія (3) касательной къ данной кривой мы предполагали, что уравненіе кривой задано въ видѣ $y = f(x)$, т. е. что ордината выражена какъ явная функція абсциссы, но часто уравненіе кривой задается въ слѣдующемъ видѣ:

$$F(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

т. е. нерѣшеннымъ относительно y. Чтобы примѣнить уравненіе (3) и къ этому случаю надо найти величину y', для чего стоитъ только воспользоваться показаннымъ въ § 39 правиломъ нахожденія производной неявной функціи.

Именно будетъ:

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

и подставляя эту величину въ уравненіе (3) получимъ, по приведеніи, уравненіе касательной въ такомъ видѣ:

$$(\xi - x)\,F'_x + (\eta - y)\cdot F'_y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

въ которомъ ξ и η по прежнему обозначаютъ координаты производной точки касательной (текущія координаты), x и y координаты заданной на кривой, коей уравненіе

$$F(x, y) = 0,$$

точки касанія и

$$F'_x = \frac{\partial F(xy)}{\partial x}$$

$$F'_y = \frac{\partial F(xy)}{\partial y}$$

суть частныя производныя функціи $F(x, y)$ взятыя первая по x, вторая по y.

Примѣръ. Составить уравненіе касательной въ данной точкѣ $M(x, y)$ къ эллипсу:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Въ этомъ случаѣ функція $F(x, y)$ есть:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

значитъ:

$$F'_x = \frac{2x}{a^2}; \quad F'_y = \frac{2y}{b^2}$$

и искомое уравненіе касательной, будетъ по сокращеніи множителя 2:

$$(\xi - x)\frac{x}{a^2} + (\eta - y)\frac{y}{b^2} = 0$$

или:

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

но такъ какъ точка M лежитъ на данной кривой, а значитъ координаты ея удовлетворяютъ уравненію этой кривой, то

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и значитъ уравненіе (*) можетъ быть написано въ такомъ видѣ:

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (**)$$

причемъ надо помнить что ξ и η означаютъ текущія координаты касательной, x и y координатъ заданной точки касанія.

§ 88. Кривая на плоскости можетъ быть задаваема не только однимъ уравненіемъ, но, какъ то особенно часто дѣлается въ вопросахъ механики, двумя уравненіями вида:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \omega(t) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

гдѣ x и y означаютъ координаты любой точки кривой, t — представляетъ собою перемѣнную независимую.

Легко видѣть, что для перехода отъ этого способа заданія кривой къ разсмотрѣнному выше стоитъ только рѣшить первое изъ уравненій (6) относительно t и найденное значеніе подставить во второе, которое тогда и приметъ видъ:

$$y = f(x).$$

иными словами исключить изъ уравненій (6) букву t.

Чтобы составить уравненіе касательной къ заданной кривой не прибѣгая къ этому исключенію, стоитъ только повторить приведенное въ § 86 разсужденіе. Пусть точка $M(x, y)$ соотвѣтствуетъ значенію t перемѣнной независимой, точка M_1 значенію $t+\Delta t$, тогда координаты точки M_1 будутъ:

$$x_1 = x + \Delta x$$

$$y_1 = y + \Delta y$$

и уравненіе сѣкущей MM_1 будетъ:

$$\eta - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(\xi - x).$$

Раздѣливъ числителя и знаменателя дроби $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ на Δt получимъ равную ей дробь:

$$\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

и значитъ будетъ:

$$\text{пред.}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{пред.}\frac{\Delta y}{\Delta t} : \text{пред.}\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

но

$$\text{пред.}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} = \omega'(t)$$

и

$$\text{пред.}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$$

значитъ

$$\text{пред.}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\omega'(t)}{\varphi'(t)}$$

и искомое уравненіе касательной будетъ:

$$\eta - y = \frac{\omega'(t)}{\varphi'(t)} \cdot (\xi - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Замѣтимъ, что это уравненіе можно было-бы написать и сразу ибо въ силу уравненій (6) будетъ:

$$\Delta y = dy + \varepsilon \cdot dt$$

$$\Delta x = dx + \delta \cdot dt$$

причемъ ε и δ безконечно-малыя одновременно съ dt. Отсюда слѣдуетъ (§ 14)

$$\text{пред.}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

но

$$dy = \omega'(t) \cdot dt$$

и

$$dx = \varphi'(t) \cdot dt$$

значитъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega'(t)}{\varphi'(t)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Замѣтимъ, что въ большей части вопросовъ, когда кривая задана двумя уравненіями (6) бываетъ нужно знать не уравненіе касательной, а только уголъ составляемый ею съ осью $x^{\text{овъ}}$. Въ силу формулы (8) этотъ уголъ получится изъ равенства:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\omega'(t)}{\varphi'(t)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8')$$

§ 89. Перпендикуляръ къ касательной проведенный черезъ точку касанія называется *нормалью* къ кривой въ этой точкѣ. Нормаль.

Зная уравненіе касательной сейчасъ-же можно составить и уравненіе нормали. Стоитъ только замѣтить, что въ силу условія перпендикулярности угловой коэфиціентъ нормали выразится такъ:

$$-\frac{1}{y'}$$

и значитъ уравненіе нормали будетъ:

$$(\eta - y) = -\frac{1}{y'}(\xi - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

когда уравненіе касательной написано въ видѣ:

$$\eta - y = y'(\xi - x).$$

Если-же уравненіе касательной написано такъ:

$$(\xi - x)F'_x + (\eta - y)F'_y = 0,$$

то уравненіе нормали будетъ:

$$(\xi - x)F'_y - (\eta - y)F'_x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9')$$

Примѣръ. Составить уравненіе нормали къ параболѣ:

$$y^2 = 2px \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

Чтобы воспользоваться уравненіемъ (9′) пишемъ уравненіе (*) такъ:

$$y^2 - 2px = 0$$

значитъ

$$F(x, y) = y^2 - 2px$$

и

$$F'_x = -2p$$

$$F'_y = 2y$$

подставляя въ уравненіе (9′) имѣемъ:

$$2(\xi - x)y + 2(\eta - y)p = 0$$

или по сокращеніи

$$(\xi - x)y + (\eta - y)p = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Дѣлая въ этомъ уравненіи $\eta = 0$ получаемъ абсциссу ON точки пересѣченія N нормали съ осью x-овъ:

$$\xi = ON = x + p$$

а такъ какъ $OP = x$ то $PN = p$, что даетъ простой способъ построенія нормали, а значитъ и касательной къ параболѣ, когда заданы ея вершина, ось и параметръ p.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ.

ГЛАВА XII.

Основныя понятія и теоремы интегральнаго исчисленія.

Предметъ интегральнаго исчисленія.

§ 90. Въ предыдущихъ главахъ изложены способы нахожденія производныхъ и дифференціаловъ заданныхъ функцій; предметомъ интегральнаго исчисленія служитъ обратный вопросъ, который въ общемъ видѣ можетъ быть поставленъ такъ: *по данному соотношенію между перемѣнною независимою, ея неизвѣстною функціей и производными этой функціи различныхъ порядковъ найти самую функцію.*

Простѣйшій частный случай этого вопроса есть слѣдующій: *по данной производной неизвѣстной функціи найти эту послѣднюю.*

Съ разсмотрѣнія этого частнаго случая мы и начнемъ, ибо къ нему стараются приводить и рѣшеніе общаго вопроса.

Производная простой площади.

§ 91. Покажемъ сперва нѣкоторыя геометрическія предложенія, которыя намъ понадобятся.

Пусть x и y означаютъ прямоугольныя координаты на плоскости, построимъ кривую

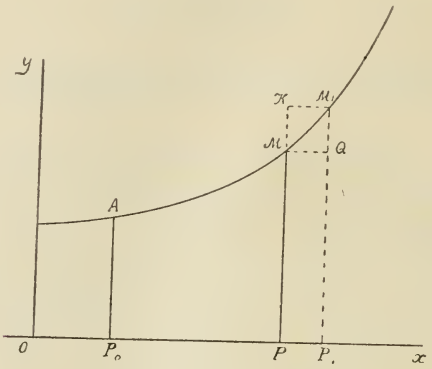
$$y = f(x)$$

и предположимъ сперва, что она находится надъ осью x-овъ, т. е. что y положительно. Возьмемъ на этой кривой постоянную точку A и перемѣнную M и пусть координаты этихъ точекъ будутъ:

точки A . . . . $OP_0 = x_0$; $P_0A = y_0 = f(x_0)$
точки M . . . . $OP = x$; $MP = y = f(x)$

при этомъ абсцисса x принята за перемѣнную независимую. Ось абсциссъ, кривая AM, начальная ордината P_0A и конечная ордината PM ограничиваютъ площадь P_0AMP, которую мы будемъ называть *простою* (черт. 16).

Черт. 16.



Простая площадь P_0AMP будетъ очевидно получать опредѣленныя величины, какъ только будетъ приписано какое-либо частное значеніе абсциссѣ $OP = x$, значитъ эта площадь будетъ функціею x, обозначимъ эту функцію черезъ $\varphi(x)$ такъ что

$$S = \text{площ. } P_0AMP = \varphi(x).$$

Найдемъ теперь производную этой функціи, т. е. величину

$$S' = \varphi'(x).$$

Для этой цѣли прибавивъ къ x величину $PP_1 = \Delta x$, строимъ соотвѣтствующую абсциссѣ $OP_1 = x + \Delta x$ точку M_1, тогда новое значеніе площади будетъ:

$$S + \Delta S = \text{площ. } P_0AM_1P_1 = \varphi(x + \Delta x)$$

значитъ приращеніе площади будетъ:

$$\Delta S = \Delta\varphi(x) = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = P_0AM_1P_1 - P_0AMP = \\ = PMM_1P_1$$

проведя изъ M и M_1 прямыя параллельныя къ оси x-овъ видимъ, что

$$PMQP_1 < PMM_1P_1 < PKM_1P_1$$

иначе:

$$P\overline{M}\cdot P\overline{P_1} < \Delta S < P_1\overline{M}_1\cdot P\overline{P_1}$$

но

$$PM = y = f(x);\ P_1M_1 = f(x+\Delta x);\ PP_1 = \Delta x$$

такимъ образомъ имѣемъ неравенство

$$f(x)\cdot\Delta x < \Delta S < f(x+\Delta x)\cdot\Delta x$$

Раздѣливъ на Δx (величина эта положительная) имѣемъ:

$$f(x) < \frac{\Delta S}{\Delta x} < f(x+\Delta x)$$

По мѣрѣ уменьшенія Δx, послѣдняя часть этого неравенства неопредѣленно приближается къ первой $f(x)$, и предѣлъ ея равенъ $f(x)$, слѣдовательно и средняя часть приближается къ тому-же предѣлу. Но предѣлъ $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ или что тоже пред. $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ есть по опредѣленію производная функціи $S = \varphi(x)$; такимъ образомъ имѣемъ

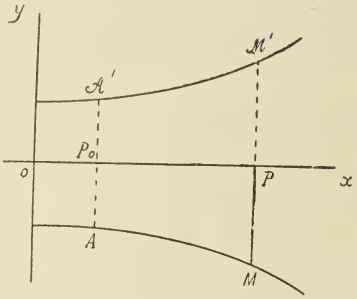
$$\text{пред}\ \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x) = f(x) = PM$$

т. е. *производная простой площади P_0AMP разсматриваемой какъ функція абсциссы x есть крайняя ордината PM.*

Если данная кривая AM лежитъ подъ осью x, то разумѣя подъ площадью P_0AMP всегда величину положительную

мы найдемъ для ея производной не величину PM а величину $-PM$ (черт. 17).

Черт. 17.



Дѣйствительно построимъ еще другую кривую $A'M'$, уравненіе которой пусть будетъ

$$y = -f(x),$$

тогда она будетъ отличаться отъ кривой AM только тѣмъ, что ея ордината соотвѣтствующая той же абсциссѣ будетъ равна ординатѣ кривой AM, но лежать будетъ надъ осью $x^{\text{-овъ}}$.

Для площади $P_0A'M'P$, лежащей надъ осью $x^{\text{-овъ}}$ и очевидно равной площади P_0AMP, лежащей подъ осью $x^{\text{-овъ}}$, какъ уже доказано, производная есть крайняя ордината $PM' = -PM$.

Значитъ

$$(P_0A'M'P)' = (P_0AMP)' = -PM$$

Итакъ: *производная простой площади P_0AMP находящейся подъ осью $x^{\text{-овъ}}$, иначе въ сторонѣ отрицательныхъ $y^{\text{-овъ}}$, равна крайней ординатѣ PM взятой со знакомъ минусъ.*

§ 92. Положимъ теперь что кривая, которой уравненіе есть

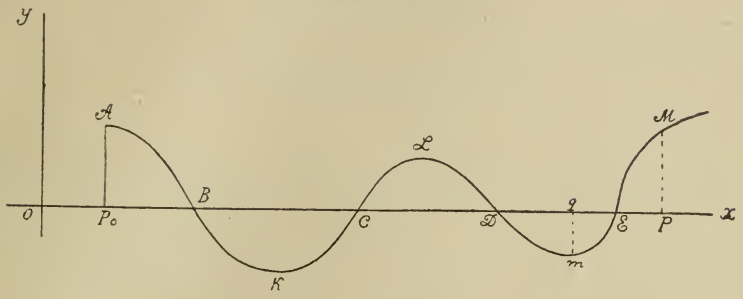
$$y = f(x)$$

лежитъ частію надъ осью $x^{\text{-овъ}}$, частью подъ осью $x^{\text{-овъ}}$, и возьмемъ опять на этой кривой какую-нибудь постоянную точку A съ координатами $OP_0 = x_0$ и $P_0A = f(x_0)$ и перемѣнную точку M съ абсциссою $OP = x$ принимаемой за перемѣнную независимую и ординатой $PM = f(x)$ (черт. 18).

Разсмотримъ алгебраическую сумму площадей заключенныхъ между ординатами P_0A и PM, осью $x^{\text{-овъ}}$ и кривою,

причемъ всѣ площади лежащія надъ осью будемъ считать со знакомъ +, а всѣ площади подъ осью со знакомъ —. Очевидно, что эта сумма будетъ функціей отъ крайней абсциссы

Черт. 18.



$OP = x$, эту функцію по прежнему обозначимъ черезъ $\varphi(x)$, такъ что будетъ:

$$\varphi(x) = P_0AB - BKC + CLD - DmE + EMP$$

Производная $\varphi'(x)$ будетъ всегда равна крайней ординатѣ, соотвѣтствующей абсциссѣ x будетъ ли эта ордината надъ осью или подъ осью.

Дѣйствительно, взявъ крайнюю точку въ M будемъ имѣть:

$$\varphi'(x) = (P_0AB)' - (BKC)' + (CLD)' - (DmE)' + (EMP)'$$

но площади P_0AB, BKC, CLD, DmE постоянныя и производныя ихъ нули, значитъ

$$\varphi'(x) = (EMP)' = PM$$

по доказанному выше.

Если взять точку P въ q иначе за крайнюю ординату принять qm, лежащую подъ осью, то будетъ

$$\varphi(x) = P_0AB - BKC + CLD - Dqm$$

и было-бы

$$\varphi'(x) = -(Dqm)'$$

но было показано, что

$$(Dpm)' = -\overline{qm}$$

и слѣдовательно

$$\varphi'(x) = +\overline{qm}.$$

Итакъ имѣемъ слѣдующую общую теорему: *Производная отъ алгебраической суммы площадей, заключенныхъ между постоянною начальною ординатою, перемѣнною ординатою, соотвѣтствующей абсциссѣ x, кривою и осью абсциссъ, считая со знакомъ $+$ всѣ площади лежащія со стороны положительныхъ ординатъ и со знакомъ $-$ всѣ площади лежащія со стороны отрицательныхъ ординатъ, равна крайней, соотвѣтствующей принимаемой за перемѣнную независимую абсциссѣ x, ординатѣ.*

Опредѣленный интегралъ.

§ 93. Доказанная выше общая теорема доставляетъ геометрическое истолкованіе разсматриваемому нами вопросу.

Въ самомъ дѣлѣ положимъ, что требуется найти такую функцію $F(x)$, производная которой равнялась-бы заданной функціи $f(x)$, т. е. чтобы имѣло мѣсто равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Возьмемъ прямоугольныя оси координатъ и построимъ кривую, уравненіе которой есть

$$y = f(x),$$

зададимъ себѣ по произволу какое-нибудь частное значеніе $x = x_0$ и проведемъ соотвѣтствующую ему ординату P_0A, которую и примемъ за начальную. Разсмотримъ перемѣнную абсциссу $OP = x$ и соотвѣтствующую ей ординату PM. Ука-

занная въ теоремѣ алгебраическая сумма S площадей разсматриваемая какъ функція отъ x и есть искомая, т. е.

$$F(x) = S.$$

Вышеупомянутая алгебраическая сумма площадей называется опредѣленнымъ интеграломъ взятымъ между предѣлами $OP_0 = x_0$ и $OP = x$ отъ функціи $f(x)$, изображаемой кривою AM.

Величина x_0 называется *нижнимъ предѣломъ*, x — *верхнимъ предѣломъ* сказаннаго интеграла.

Опредѣленный интегралъ отъ функціи $f(x)$ взятый между предѣлами x_0 и x обозначается знакоположеніемъ

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

Замѣтимъ теперь-же что опредѣленный интегралъ, у котораго верхній предѣлъ перемѣнный *есть функція этого предѣла*, а не буквы стоящей подъ знакомъ интеграла, поэтому подъ знакомъ интеграла можно писать любую букву напр. t или z и т. д. будетъ:

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz = \text{и т. д. . .}$$

Изъ самого опредѣленія опредѣленнаго интеграла слѣдуетъ такая теорема:

Производная отъ опредѣленнаго интеграла

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

по верхнему предѣлу x считаемому перемѣнною независимою есть $f(x)$ т. е. значеніе подъинтегральной функціи для верхняго предѣла x.

Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что функція

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

т. е. опредѣленный интегралъ отъ предложенной функціи $f(t)$ взятый между *постояннымъ* нижнимъ предѣломъ x_0 и *перемѣннымъ* верхнимъ x, даетъ рѣшеніе поставленнаго въ началѣ этой главы вопроса о нахожденіи такой функціи, коей производная равнялась бы заданной $f(x)$.

Спрашивается: есть-ли кромѣ этого другія рѣшенія и какія именно?

Пусть $\psi(x)$ есть такая функція, которой производная также равна $f(x)$ т. е.

$$\psi'(x) = f(x)$$

Такъ какъ

$$\varphi'(x) = f(x)$$

то

$$\psi'(x) - \varphi'(x) = 0$$

но

$$\psi'(x) - \varphi'(x) = [\psi(x) - \varphi(x)]' = 0$$

это уравненіе показываетъ, что производная отъ разности $\psi(x) - \varphi(x)$ есть нуль, значитъ эта разность есть величина *постоянная*, такимъ образомъ всякое другое рѣшеніе отличается отъ найденнаго $\varphi(x)$ на величину постоянную, поэтому сдѣлавъ:

$$S = \psi(x) = \varphi(x) + C = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C$$

гдѣ C есть *произвольная постоянная*. Мы изъ этой формулы получимъ всѣ рѣшенія нашего вопроса т. е. всѣ рѣшенія уравненія

$$S' = f(x)$$

если будемъ приписывать C всѣ возможныя постоянныя величины, т. е. несодержащія буквы x.

Такимъ образомъ все приводится къ нахожденію опредѣленнаго интеграла

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Неопредѣленный интегралъ.

§ 94. *Общая величина, содержащая произвольную постоянную, такой функціи* $\psi(x)$ *производная, которой равна заданной функціи* $f(x)$ *называется неопредѣленнымъ интеграломъ отъ* $f(x)$ *или отъ* $fx)\,dx$ *и выражается знакоположеніемъ*

$$\int f(x)\,dx$$

Такимъ образомъ мы можемъ написать равенство:

$$\int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C.$$

Покажемъ теперь связь между опредѣленнымъ и неопредѣленнымъ интегралами.

Замѣтимъ во-первыхъ, что по самому опредѣленію опредѣленнаго интеграла какъ площади слѣдуетъ, *что всякій опредѣленный интегралъ, у коего верхній предѣлъ равенъ нижнему, равенъ нулю.*

Такъ какъ неопредѣленный интегралъ $\psi(x)$ равенъ опредѣленному $\varphi(x)$ сложенному съ произвольною постоянною C при всякой величинѣ x, то сдѣлавъ въ равенствѣ

$$\psi(x) = \varphi(x) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

$x = x_0$ мы получимъ

$$\psi(x_0) = \varphi(x_0) + C$$

но

$$\varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt = 0$$

значитъ

$$C = \psi(x_0)$$

Подставляя эту величину въ уравненіе (*), можемъ его написать въ такомъ видѣ:

$$\varphi(x) = \psi(x) - \psi(x_0)$$

что выражаетъ такую теорему:

Опредѣленный интегралъ получится, если въ неопредѣленномъ $\psi(x)$ подставить сначала верхній предѣлъ x, что даетъ $\psi(x)$, затѣмъ нижній, что даетъ $\psi(x_0)$, и вычесть второй результатъ изъ перваго.

Изъ этой теоремы, очевидно, что буква стоящая подъ знакомъ опредѣленнаго интеграла какъ перемѣнная не вліяетъ на величину его, и что опредѣленный интегралъ зависитъ только отъ своихъ предѣловъ и вида подъинтегральной функціи.

Въ неопредѣленномъ интегралѣ

$$\int f(x)\,dx$$

функція $f(x)$ называется также какъ и въ опредѣленномъ — *подъинтегральною*, а произведеніе $f(x)\,dx$ *подъинтегральнымъ дифференціаломъ*.

Простѣйшія свойства опредѣл. интеграла.

§ 95. Пусть будетъ данъ опредѣленный интегралъ

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и будемъ разсматривать его предѣлы x и x_0 какъ перемѣнныя *другъ отъ друга независящія*.

Было показано, что производная опредѣленнаго интеграла по верхнему его предѣлу равна подъинтегральной функціи отъ этого предѣла, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) = \psi'(x) = f(x)$$

Найдемъ теперь производную опредѣленнаго интеграла по нижнему его предѣлу, для чего продифференцируемъ формулу (1) по x_0, причемъ x надо считать за постоянную, получимъ:

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) = -\psi'(x_0)$$

Но такъ какъ при *всякомъ* x

$$\psi'(x) = f(x)$$

то сдѣлавъ $x = x_0$ получаемъ

$$\psi'(x_0) = f(x_0)$$

Значитъ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) = -\psi'(x_0) = -f(x_0)$$

т. е. имѣемъ такую теорему: *Если въ опредѣленномъ интегралѣ нижній и верхній предѣлы разсматриваются какъ перемѣнныя независимыя другъ отъ друга, то производная его по верхнему предѣлу равна подъинтегральной функціи отъ этого предѣла, а по нижнему подъинтегральной функціи отъ нижняго предѣла взятой со знакомъ минусъ.*

Покажемъ теперь, *что всякій опредѣленный интегралъ можно представить въ видѣ суммы сколькихъ угодно другихъ интеграловъ отъ той-же функціи причемъ верхній предѣлъ каждаго слагаемаго равенъ нижнему слѣдующаго, а его нижній верхнему предыдущаго. Въ первомъ слагаемомъ нижній предѣлъ есть вмѣстѣ съ тѣмъ и нижній предѣлъ заданнаго интеграла, а верхній предѣлъ послѣдняго слагаемаго равенъ верхнему заданнаго.*

Возьмемъ кромѣ предѣловъ x и x_0 заданнаго интеграла еще сколько угодно величинъ

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots\ldots a_n$$

то будемъ имѣть равенства:

$$\int_{x_0}^{a_1} f(t)\,dt = \psi(a_1) - \psi(x_0)$$

$$\int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt = \psi(a_2) - \psi(a_1)$$

$$\int_{a_2}^{a_3} f(t)\,dt = \psi(a_3) - \psi(a_2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int_{a_n}^{x} f(t)\,dt = \psi(x) - \psi(a_n)$$

сложивъ эти равенства получимъ:

$$\int_{x_0}^{a_1} f(t)\,dt + \int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt + \ldots\ldots + \int_{a_n}^{x} f(t)\,dt = \psi(x) - \psi(x_0)$$

но

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dt$$

откуда вытекаетъ слѣдующее равенство, выражающее высказанную теорему:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{a_1} f(t)\,dt + \int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt + \int_{a_2}^{a_3} f(t)\,dt +$$

$$+ \int_{a_3}^{a_4} f(t)\,dt + \ldots\ldots + \int_{a_n}^{x} f(t)\,dt.$$

Необходимо замѣтить что какъ эта теорема такъ и всѣ предыдущія теоремы и опредѣленія основаны на томъ предположеніи, что подъинтегральная функція остается непрерывною для всѣхъ величинъ t лежащихъ между предѣлами интеграла, такъ какъ только при этомъ предположеніи имѣло мѣсто то геометрическое представленіе интеграла какъ площади, изъ котораго мы исходили, ибо оно предполагало, что кривая $y = f(x)$ непрерывная.

Случаи когда подъинтегральная функція претерпѣваетъ разрывы непрерывности между предѣлами интегрированія, или обращается въ безконечность требуютъ особаго разсмотрѣнія, которое не входитъ въ объемъ нашего курса, поэтому мы будемъ предполагать непрерывность тѣхъ функцій, съ которыми имѣемъ дѣло.

Аналитическое опредѣленіе опр. интеграла.

§ 95. Покажемъ теперь, что опредѣленный интегралъ есть предѣлъ нѣкоторой суммы, число слагаемыхъ которой неопредѣленно увеличивается каждое-же слагаемое неопредѣленно убываетъ.

Для этого воспользуемся опять геометрическимъ представленіемъ опредѣленнаго интеграла, и предположимъ сперва, что кривая

$$y = f(x)$$

находится надъ осью x[-063] и что ординаты ея отъ абсциссы x_0 до какой угодно абсциссы x идутъ возрастая.

Раздѣлимъ промежутокъ $P_0P = x - x_0$ на n какихъ угодно равныхъ или неравныхъ частей, соблюдая лишь условіе, чтобы при неопредѣленномъ возрастаніи n каждая изъ этихъ частей неопредѣленно убывала. Пусть абсциссы точекъ дѣленія: P_1, $P_2 \ldots P_i$, P_{i+1}, $\ldots P_{n-1}$ будутъ соотвѣтственно: x_1, x_2, $\ldots$ x_i x_{i+1} $\ldots$ x_{n-1} (черт. 19).

Построимъ для каждой абсциссы соотвѣтствующую ординату, а затѣмъ на каждомъ основаніи такомъ какъ P_iP_{i+1} построимъ два прямоугольника:

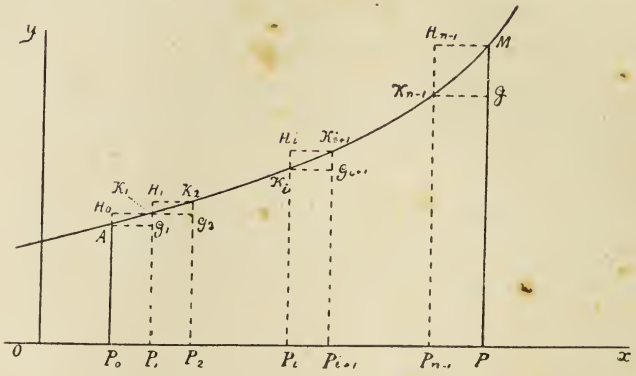
входящій

$$P_i K_i G_{i+1} P_{i+1} = (x_{i+1} - x_i) \cdot P_i K_i = (x_{i+1} - x_i) \cdot f(x_i)$$

и выходящій

$$P_i H_i K_{i+1} P_{i+1} = (x_{i+1} - x_i) \cdot P_{i+1} K_{i+1} = (x_{i+1} - x_i) \cdot f(x_{i+1}).$$

Черт. 19.



Пусть сумма всѣхъ прямоугольниковъ входящихъ есть S, а выходящихъ есть Σ, тогда очевидно

$$S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (x_{i+1} - x_i) f(x_i) + \ldots + \ldots + (x - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

$$\Sigma = (x_1 - x_0) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1}) + \ldots + \ldots + (x - x_{n-1}) f(x)$$

очевидно что сумма S меньше площади P_0AMP, сумма-же Σ больше этой площади каково-бы ни было число дѣленій n.

Итакъ имѣемъ неравенства:

$$S < \text{площ. } P_0AMP < \Sigma.$$

Съ другой стороны отношеніе площади каждаго входящаго прямоугольника къ площади выходящаго, построеннаго на томъ же основаніи имѣетъ предѣломъ 1, когда основаніе неопредѣленно убываетъ, ибо очевидно

$$\frac{\text{пл. } P_i\ H_i\ K_{i+1}\ P_{i+1}}{\text{пл. } P_i\ K_i\ G_{i+1}\ P_{i+1}} = \frac{P_{i+1}\ K_{i+1}}{P_i\ K_i} = \frac{f(x_{i+1})}{f(x_i)}$$

а такъ какъ разность $x_{i+1} - x_i$ безконечно-малая то и разность $f(x_{i+1}) - f(x_i)$ безконечно-малая, ибо функція $f(x)$ предполагается непрерывною, значитъ пред. $\frac{f(x_{i+1})}{f(x_i)} = 1$, а значитъ и

$$\text{пред. } \frac{P_i\ H_i\ K_{i+1}\ P_{i+1}}{P_i\ K_i\ G_{i+1}\ P_{i+1}} = 1.$$

слѣдовательно по 2-ой изъ основныхъ теоремъ о безконечно-малыхъ (§ 11) предѣлы суммъ Σ и S между собою равны, т. е.

$$\text{пред. } S = \text{пред. } \Sigma$$

и слѣдовательно разность

$$\text{пред. } \Sigma - \text{пред. } S = \text{пред. } (\Sigma - S) = 0$$

и значитъ сама разность $\Sigma - S$ безконечно-малая, а такъ какъ очевидно, что положительныя разности

$$\Sigma - \text{площ. } P_0AMP < \Sigma - S$$

и

$$\text{площ. } P_0AMP - S < \Sigma - S,$$

то значитъ и каждая изъ разностей

$$\Sigma - \text{площ. } P_0AMP = \text{безконечно-малой}$$

$$\text{площ. } P_0AMP - S = \text{безконечно-малой,}$$

а такъ какъ площадь P_0AMP есть величина постоянная (неизмѣняющаяся при измѣненіи числа дѣленій n, т. е. при измѣненіи S и Σ, предѣлы коихъ ищутся) то по опредѣленію предѣла имѣемъ:

$$\text{пред. } \Sigma = \text{площ. } P_0AMP = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

$$\text{пред. } S = \text{площ. } P_0AMP = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Итакъ имѣемъ теорему: *Опредѣленный интегралъ* $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ *есть предѣлъ суммы* S *или суммы* Σ *такъ что*

$$\left.\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \text{пред. } [&(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \\ &\ldots\ldots + \ldots\ldots + (x - x_{n-1})f(x_{n-1})]\\ \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \text{пред. } [&(x_1 - x_0)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + \\ &\ldots\ldots + \ldots\ldots + (x - x_{n-1})f(x)]\end{aligned}\right\}. \quad (*).$$

Когда кривая $y = f(x)$ отъ точки съ абсциссою x_0 до точки съ абсциссою x идетъ такъ какъ на чертежѣ, которымъ мы пользовались, т. е. что y все время возрастаетъ, то сумма S меньше интеграла а сумма Σ больше его, если кривая $f(x)$ шла бы такъ, что ея ордината все время бы убывала, то сумма S представляла бы сумму выходящихъ прямоугольниковъ, а сумма Σ сумму входящихъ, во всякомъ случаѣ формулы (*) будутъ по прежнему имѣть мѣсто. Нетрудно убѣдиться, подраздѣляя кривую $f(x)$, на такіе участки для каждаго изъ которыхъ ордината измѣняется или все время возрастая или все время убывая, что формулы (*) остаются справедливыми для всякой непрерывной функціи $f(x)$.

Величины $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_{n-1}$ должны удовлетворять только тому условію, чтобы было:

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots\ldots < x_{n-1} < x$$

и кромѣ того, чтобы каждая изъ разностей

$$x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ x_3 - x_2,\ \ldots\ x - x_{n-1}$$

убывала неопредѣленно.

Въ томъ случаѣ когда $x_0 > x$ надо вмѣсто предыдущихъ неравенствъ взять такія:

$$x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > x.$$

Законъ по которому идутъ величины $x_1\ x_2\ \ldots\ x_{n-1}$, остается совершенно произвольнымъ, лишь бы предыдущія условія были выполнены. Можно напр. всѣ разности

$$x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ \ldots\ x - x_{n-1}$$

взять равными между собою, что соотвѣтствуетъ тому случаю, когда основаніе площади P_0P будетъ раздѣлено на n равныхъ частей, обозначивъ каждую изъ которыхъ черезъ h получимъ:

$$x_1 = x_0 + h;\ x_2 = x_0 + 2h;\ \ldots\ x = x_0 + nh$$

и

$$h = \frac{x - x_0}{n}$$

тогда формулы (*) примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt &= \text{пред.}\ \frac{x-x_0}{n} \cdot [f(x_0) + f(x_0+h) + f(x_0+2h) + \\ &\quad + \ldots + f(x_0+(n-1)h)] \\ \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt &= \text{пред.}\ \frac{x-x_0}{n} \cdot [f(x_0+h) + f(x_0+2h) + \\ &\quad + \ldots + f(x)] \end{aligned}\right\} \quad (**).$$

Если ввести дѣлитель n въ скобки, то эти формулы можно выразить такъ: *Опредѣленный интегралъ равенъ среднему арив-*

метическому изъ всѣхъ значеній подъинтегральной функціи умноженному на разность предѣловъ.

Положимъ что функція $f(t)$ постоянно возрастаетъ или постоянно убываетъ, когда t идетъ отъ x_0 до x, тогда интегралъ будетъ заключатся между суммами S и Σ, значитъ погрѣшность, которую мы сдѣлаемъ взявъ за величину интеграла частное значеніе одной изъ этихъ суммъ будетъ меньше $\Sigma - S$ по абсолютной величинѣ. Изъ формулъ же (**) видно что

$$\Sigma - S = \frac{x - x_0}{n} \cdot [f(x) - f(x_0)],$$

значитъ мы можемъ взять n столь большимъ, чтобы эта погрѣшность была менѣе любой напередъ назначенной величины ε, такъ какъ для этого стоитъ только взять

$$n > \frac{x - x_0}{\varepsilon} \cdot [f(x) - f(x_0)].$$

Такимъ образомъ формулы (**) даютъ возможность вычислить величину опредѣленнаго интеграла съ любою степенью точности, хотя практически выполненіе этого вычисленія и можетъ представиться затруднительнымъ въ виду большого числа членовъ въ суммахъ.

Часто оба предѣла интеграла бываютъ постоянные, тогда и самый опредѣленный интегралъ будетъ величиною постоянной, и выражаетъ площадь содержащуюся между двумя крайними ординатами осью $x^{\text{овъ}}$ и кривою, уравненіе которой есть $y = F(x)$, гдѣ $F(x)$ есть подъинтегральная функція.

§ 96. Изъ опредѣленія неопредѣленнаго интеграла слѣдуетъ уравненіе

$$\left\{\int F(x)\,dx\right\}' = F(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

т. е. что *производная неопредѣленнаго интеграла равна подъин-*

тегральной функціи. Умноживъ обѣ части этого равенства на dx получимъ

$$\{\int F(x)\,dx\}'\,dx = d\int F(x)\,dx = F(x)\,dx$$

т. е. *дифференціалъ отъ неопредѣленнаго интеграла равенъ подъинтегральному дифференціалу.*

Отсюда слѣдуетъ, что знаки интеграла и дифференціала взаимно уничтожаются, *если второй слѣдуетъ послѣ перваго.* Посмотримъ, что будетъ если дѣйствія интегрированія и дифференцированія произвести въ обратномъ порядкѣ, т. е. чему равенъ

$$\int du$$

гдѣ u какая угодно функція отъ x. Функція имѣющая дифференціалъ du есть во первыхъ u, это и будетъ частная величина неопредѣленнаго интеграла, общая получится если къ u прибавить постоянное произвольное т. е.

$$\int du = u + C.$$

Откуда слѣдуетъ, *что если знакъ интеграла стоитъ послѣ знака дифференціала, то они также уничтожаются взаимно, но къ результату надо прибавить произвольное постоянное.*

Было показано, что дифференціалъ алгебраической суммы равенъ таковой же суммѣ дифференціаловъ слагаемыхъ:

$$d(u \pm v \pm w \pm \cdots) = du \pm dv \pm dw \pm \cdots.$$

взявъ неопредѣленный интегралъ обѣихъ частей этого равенства имѣемъ:

$$u \pm v \pm w \pm \cdots + C = \int [du \pm dv \pm dw \pm \cdots]$$

но съ другой стороны:

$$\int du = u + A$$

$$\int dv = v + B$$

$$\int dw = w + D$$

. . . . . .

гдѣ A, B, $D \cdots$ произвольныя постоянныя
значитъ:

$$u = \int du - A$$

$$v = \int dv - B$$

$$w = \int dw - D$$

. . . .

слѣдовательно:

$$u \pm v \pm w \pm \cdots + C = \int du \pm \int dv \pm \int dw + \cdots +$$
$$+ C \mp A \mp B \mp D \ldots$$

или иначе:

$$\int (du \pm dv \pm dw \pm \ldots) = \int du \pm \int dv \pm \int dw \pm \ldots +$$
$$+ C \mp A \mp B \mp \ldots$$

но очевидно можно вмѣсто алгебраической суммы постоянныхъ произвольныхъ писать просто C и значитъ

$$\int (du \pm dv \pm dw \pm \ldots) = \int du \pm \int dv \pm \int dw \pm \ldots$$

т е. *интегралъ отъ суммы равенъ суммѣ интеграловъ отдѣльныхъ ея членовъ.*

Покажемъ теперь, *что постоянный множитель можно вынести за знакъ интеграла.*

Мы имѣли формулу:

$$a\,du = d(au)$$

взявъ интегралъ имѣемъ

$$\int a\,du = \int d(au) = au + C$$

но

$$u = \int du - A$$

значитъ

$$\int a\,du = a\left(\int du - A\right) + C = a\int du + C - Aa$$

но разность $C—Aa$ есть постоянное произвольное и значитъ имѣемъ:

$$\int a\,du = a\int du + C_1$$

гдѣ C_1 постоянное произвольное, это равенство и доказываетъ высказанную теорему.

Какъ эта такъ и предыдущая теорема, какъ легко видѣть относится одинаково и къ опредѣленнымъ интеграламъ.

ГЛАВА XII.

Пріемы интегрированія.

§ 97. Способы разысканія неопредѣленныхъ интеграловъ разнообразны, но всѣ ихъ можно подвести къ четыремъ главнымъ пріемамъ именно:

1) Непосредственное интегрированіе.

2) Интегрированіе черезъ разложеніе.

3) Интегрированіе черезъ введеніе новой перемѣнной.

4) Интегрированіе по частямъ.

Непосредственное интегрированіе.

§ 98. Непосредственное интегрированіе основано на формулѣ.

$$\int du = u + C$$

изъ которой видно, что имѣя таблицу дифференціаловъ разныхъ функцій можно написать и таблицу интеграловъ отъ этихъ дифференціаловъ.

Такъ напримѣръ имѣли формулу

$$d(u^m) = m\,u^{m-1}\,du.$$

Взявъ интегралъ обѣихъ частей, имѣемъ:

$$\int m\,u^{m-1}\,du = m\int u^{m-1}\,du = \int d(u^m) = u^m + C$$

откуда слѣдуетъ:

$$\int u^{m-1}\,du = \frac{u^m}{m} + C$$

полагая

$$m - 1 = n$$

имѣемъ

$$m = n + 1$$

и

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Эта формула имѣетъ мѣсто при всякомъ n положительномъ или отрицательномъ, цѣломъ или дробномъ, кромѣ $n = -1$.

Когда же $n = -1$, то интегралъ будетъ

$$\int u^{-1}\,du = \int \frac{du}{u} = \int d(\log u) = \log u + C.$$

Совершенно также по остальнымъ формуламъ таблицы дифференціаловъ, составимъ такую таблицу интеграловъ.

Таблица интеграловъ.

1) $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

2) $\int \frac{du}{u} = \log u + C$

3) $\int A^u\,du = \frac{A^u}{\log A} + C$

4) $\int e^{au}\,du = \frac{1}{a}\,e^{au} + C$

5) $\int \cos au\,du = \frac{1}{a}\operatorname{Sin} au + C$

6) $\int \operatorname{Sin} au\,du = -\frac{1}{a}\cos au + C$

7) $\int \frac{du}{\operatorname{Cos}^2 u} = \operatorname{tg} u + C$

8) $\int \frac{du}{\operatorname{Sin}^2 u} = -\operatorname{cotg} u + C$

9) $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C$

10) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc\,Sin} u + C$

Непосредственное интегрированіе и состоитъ въ примѣненіи одной изъ формулъ этой таблицы.

Такъ напримѣръ:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{x} + C$

или

2) $\int \frac{dx}{(x-a)^3} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^3} =$

$$= \int (x-a)^{-3}\,d(x-a) = -\frac{1}{2}\,(x-a)^{-2} + C$$

3) $\int \operatorname{Cos}^3 x \operatorname{Sin} x\,dx = -\int \operatorname{Cos}^3 x \cdot d(\operatorname{Cos} x) =$

$$= -\frac{1}{4}\operatorname{Cos}^4 x + C$$

4) $\int \frac{\operatorname{Cotg} x \cdot dx}{\sqrt[3]{\operatorname{Sin} x}} = \int \frac{\operatorname{Cos} x \cdot dx}{\operatorname{Sin} x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{Sin} x}} = \int \operatorname{Sin} x^{-\frac{4}{3}} \cdot d(\operatorname{Sin} x) =$

$$= -3\operatorname{Sin}^{-\frac{1}{3}} x + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{\operatorname{Sin} x}} + C$$

$$5)\quad \int \frac{dx}{\operatorname{Sin} 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{dx}{\operatorname{Cos}^2 x}}{\frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x}} =$$

$$= \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \log \operatorname{tg} x + C$$

$$6)\quad \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x \cdot dx}{1 + e^{2x}} =$$

$$= \int \frac{d(e^x)}{1 + (e^x)^2} = \operatorname{arctg} e^x + C$$

$$7)\quad \int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\operatorname{Sin} x \cdot dx}{\operatorname{Cos} x} = -\int \frac{d \operatorname{Cos} x}{\operatorname{Cos} x} =$$

$$= -\log \operatorname{Cos} x + C = \log \sec x + C$$

$$8)\quad \int \operatorname{cotg} x \cdot dx = \int \frac{\operatorname{Cos} x\, dx}{\operatorname{Sin} x} =$$

$$= \int \frac{d \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Sin} x} = \log \operatorname{Sin} x + C.$$

Интегрированіе черезъ разложеніе.

§ 99. Интегрированіе черезъ разложеніе основано на томъ свойствѣ интеграла, что интегралъ отъ суммы равенъ суммѣ интеграловъ отдѣльныхъ ея членовъ, поэтому если можно представить подъинтегральную функцію въ видѣ суммы членовъ, отъ каждаго изъ которыхъ интегралъ можно найти, то будетъ найденъ и предложенный интегралъ.

Замѣтимъ, что всѣ слагаемыя кромѣ одного можно назначить по произволу, послѣднее же слагаемое получится вычтя сумму слагаемыхъ по произволу назначенныхъ изъ всего подъинтегральнаго дифференціала, поэтому каждый такой дифференціалъ можно представить на безчисленное множество манеровъ въ видѣ суммы — все дѣло состоитъ въ томъ, чтобы каждое изъ слагаемыхъ ея интегрировалось.

Примѣры:

1) $$\int (5x^3 + 3\sqrt{x} + 5)\,dx = 5\int x^3\,dx +$$

$$+ 3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx + 5\int dx = \tfrac{5}{4}x^4 + 2x^{\frac{3}{2}} + 5x + C$$

2) $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} =$$

$$= \frac{1}{2a}\log(x-a) - \frac{1}{2a}\log(x+a) + C =$$

$$= \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a} + C$$

3) $$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} +$$

$$+ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,Sin} x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

4) $$\int \operatorname{Sin}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 - \operatorname{Cos} 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \operatorname{Cos} 2x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{Sin} 2x + C.$$

5) $$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\operatorname{Cos}^2 x} - 1\right)\operatorname{tg}^2 x \cdot dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^2 x \cdot d\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int \left(\frac{1}{\operatorname{Cos}^2 x} - 1\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.$$

§ 100. Интегрированіе черезъ введеніе новой перемѣнной есть одинъ изъ главнѣйшихъ пріемовъ, онъ состоитъ въ томъ

Интегрированіе введеніемъ новой перемѣнной.

чтобы вмѣсто прежней перемѣнной ввести новую, выбравъ зависимость между перемѣнными такъ, чтобы преобразованный интегралъ, зависящій отъ новой перемѣнной, можно было найти, тогда найдется и предложенный, если опять вмѣсто новой перемѣнной ввести старую.

Итакъ пусть будетъ данъ интегралъ

$$\int f(x)\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и положимъ что надо замѣнить x другою перемѣнною z причемъ *задается уравненіе между* x и z.

Во 1-хъ: рѣшаемъ это уравненіе принявъ x за неизвѣстную, тогда x получится какъ функція отъ z, пусть она будетъ

$$x = \varphi(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

во 2-хъ: рѣшаемъ тоже уравненіе считая z за неизвѣстную, тогда z выразится какъ функція отъ x, пусть она будетъ

$$z = \psi(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

въ 3-хъ: вычисляемъ dx при помощи уравненія

$$x = \varphi(z)$$

такъ что

$$dx = \varphi'(z)\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

въ 4-хъ: подставляемъ величины x и dx подъ знакъ заданнаго интеграла, тогда получится:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(z)] \cdot \varphi'(z)\,dz \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

т. е. такой интегралъ гдѣ во-второй части находится перемѣнная z а не x, какъ прежде.

Положимъ что величина этого интеграла можетъ быть найдена, такъ что окажется:

$$\int f[\varphi(z)] \cdot \varphi'(z)\, dz = F(z) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

тогда по уравненію (5) будетъ:

$$\int f(x)\, dx = F(z) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

подставивъ сюда вмѣсто z его величину $\psi(x)$ и получимъ

$$\int f(x)\, dx = F[\psi(x)] + C.$$

Замѣтимъ, что часто этимъ пріемомъ пользуются для того чтобы интегралъ

$$\int f[\varphi(z)] \cdot \varphi'(z)\, dz$$

стоящій въ правой части формулы (5) преобразовать въ интегралъ

$$\int f(x)\, dx$$

для чего стоитъ только положить:

$$\varphi(z) = x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

откуда дифференцируя получимъ

$$\varphi'(z)\, dz = dx$$

и по подстановкѣ вмѣсто $\varphi(z)$ его величины x и вмѣсто произведенія $\varphi'(z)\, dz$ его величины dx и будемъ имѣть

$$\int f[\varphi(z)] \cdot \varphi'(z)\, dz = \int f(x)\, dx$$

и если окажется что $\int f(x)\,dx$ можетъ быть найденъ, такъ что

$$\int f(x)\,dx = \Omega(x) + C$$

то подставляя вмѣсто x его величину $(2')$ получимъ:

$$\int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz = \Omega[\varphi(z)] + C.$$

Какъ видно въ этомъ случаѣ нѣтъ надобности рѣшать уравненія

$$\varphi(z) = x$$

относительно z, и нѣтъ надобности находить отдѣльно величину dz, а прямо надо искать произведеніе

$$\varphi'(z)\,dz.$$

Примѣры. Найти интегралъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Полагаемъ:

$$\sqrt{x^2+a} = x + z.$$

Рѣшаемъ это уравненіе относительно x:

$$x = \frac{a-z^2}{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{z} - z\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

и относительно z:

$$z = \sqrt{x^2+a} - x = \frac{a}{\sqrt{x^2+a}+x}.$$

Вычисляемъ dx:

$$dx = \frac{1}{2}\,d\left(\frac{a}{z} - z\right) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{z^2}\right)dz = -\frac{1}{2}\,\frac{a+z^2}{z^2}\,dz$$

Вмѣсто того чтобы подставлять x въ выраженіе (1) вычисляемъ самый корень:

$$\sqrt{x^2+a} = x+z = \frac{a-z^2}{2z}+z = \frac{a+z^2}{2z}.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = -\frac{(a+z^2)\cdot 2z}{z^2\cdot(a+z^2)}\cdot dz = -\frac{dz}{z}$$

значитъ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = -\int\frac{dz}{z} = -\log z + C$$

$$= \log\frac{1}{z} + C$$

или подставляя вмѣсто z его величину имѣемъ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \log\frac{x+\sqrt{x^2+a}}{a} + C =$$

$$= \log(x+\sqrt{x^2+a}) + C_1$$

гдѣ

$$C_1 = C - \log a.$$

Итакъ имѣемъ слѣдующую формулу, которую слѣдуетъ запомнить:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \log(x+\sqrt{x^2+a}) + C \quad . \quad . \quad (*).$$

2) Найти интегралъ

$$\int \mathrm{Sin}^n x\cdot \mathrm{Cos}^{2k+1} x\cdot dx$$

гдѣ n какое угодно постоянное число, а k число цѣлое и положительное.

Положимъ

$$\mathrm{Sin}\, x = z$$

дифференцируя получаемъ

$$\operatorname{Cos} x\,dx = dz.$$

Затѣмъ имѣемъ:

$$\operatorname{Cos}^{2k+1} x \cdot dx = \operatorname{Cos}^{2k} x \cdot \operatorname{Cos} x\,dx = (\operatorname{Cos}^2 x)^k \cdot dz =$$

$$= (1 - z^2)^k \cdot dz$$

и

$$\operatorname{Sin}^n x = z^n$$

значитъ будетъ

$$\int \operatorname{Sin}^n x \operatorname{Cos}^{2k+1} x \cdot dx = \int z^n (1 - z^2)^k \cdot dz =$$

$$= \int z^n \left[1 - kz^2 + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} z^4 - \ldots \pm z^{2k}\right] \cdot dz =$$

$$= \int z^n \cdot dz - k \int z^{n+2} \cdot dz + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} \int z^{n+4} \cdot dz \ldots \pm$$

$$\pm \int z^{n+2k} \cdot dz =$$

$$= \frac{1}{n+1} z^{n+1} - \frac{k}{n+3} \cdot z^{n+3} + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2 \cdot (n+5)} z^{n+5} + \ldots \pm$$

$$\pm \frac{1}{n+2k+1} z^{n+2k+1} + C$$

остается замѣнить z его величиной $\operatorname{Sin} x$.

Совершенно также найти интегралъ:

$$\int \operatorname{Cos}^n x \operatorname{Sin}^{2k+1} x \cdot dx.$$

Интегрированіе по частямъ.

§ 101. Интегрированіе по частямъ состоитъ въ примѣненіи слѣдующей формулы:

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \ldots \quad (1)$$

помощью которой нахожденіе интеграла $\int u dv$ сводится къ нахожденію интеграла $\int v du$, который можетъ оказаться проще перваго, и если будетъ найденъ, то получится и первый.

Формула (1) получается слѣдующимъ образомъ. Имѣемъ

$$d(uv) = udv + vdu$$

отсюда интегрируя получаемъ

$$uv = \int udv + \int vdu$$

и слѣдовательно

$$\int udv = uv - \int vdu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

произвольныхъ постоянныхъ мы не пишемъ, ибо онѣ подразумѣваются при каждомъ изъ интеграловъ.

Примѣры: 1) Найти интегралъ

$$\int x^n \log x \, dx$$

гдѣ n какое угодно число.

Чтобы примѣнить формулу (1) считаемъ:

$$u = \log x$$

и

$$dv = x^n dx$$

значитъ

$$du = \frac{dx}{x}$$

и

$$v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

слѣдовательно по формулѣ (1) будетъ:

$$\int x^n \log x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \log x - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \log x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

2) Найти

$$\int \text{arc tg}\, x \cdot dx.$$

Беремъ:

$$\int \text{arc tg}\, x = u, \quad dv = dx$$

такъ что

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \qquad v = x$$

$$\int \text{arc tg}\, x\, dx = x \,\text{arc tg}\, x - \int \frac{x \cdot dx}{1+x^2} =$$

$$= x \,\text{arc tg}\, x - \frac{1}{2} \log (1+x^2) + C.$$

3) Найти

$$\int \text{arc Sin}\, x \cdot dx.$$

Беремъ:

$$\text{arc Sin}\, x = u \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad v = x$$

$$\int \text{arc Sin}\, x\, dx = x \,\text{arc Sin}\, x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x \,\text{arc Sin}\, x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

4) Найти интегралы:

$$S = \int e^{ax} \text{Cos}\, bx\, dx$$

и

$$S_1 = \int e^{ax} \text{Sin}\, bx\, dx.$$

Беремъ

$$u = e^{ax}, \qquad dv = \operatorname{Cos} bx \cdot dx$$

такъ что

$$du = a\,e^{ax}\,dx \qquad v = \frac{1}{b}\operatorname{Sin} bx$$

и значитъ:

$$S = \frac{1}{b}\,e^{ax}\operatorname{Sin} bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\operatorname{Sin} bx \cdot dx \quad \ldots\ (*).$$

Въ интегралѣ

$$\int e^{ax}\operatorname{Sin} bx \cdot dx$$

беремъ

$$u = e^{ax}, \qquad dv = \operatorname{Sin} bx \cdot dx$$

значитъ

$$du = ae^{ax}\,dx, \qquad v = -\frac{1}{b}\operatorname{Cos} bx$$

и слѣдовательно

$$S_1 = -\frac{1}{b}\,e^{ax}\operatorname{Cos} bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\operatorname{Cos} bx\,dx \ \ldots\ (**).$$

Въ силу сдѣланныхъ обозначеній формулы (*) и (**) можно написать такъ:

$$S + \frac{a}{b}\,S_1 = \frac{1}{b}\,e^{ax}\operatorname{Sin} bx \quad \ldots\ (*')$$

$$\frac{a}{b}\,S - S_1 = \frac{1}{b}\,e^{ax}\operatorname{Cos} bx$$

Рѣшивъ эти два уравненія относительно S и S_1 получаемъ:

$$S = \int e^{ax}\operatorname{Cos} bx\,dx = \frac{a\,e^{ax}\operatorname{Cos} bx + b\,e^{ax}\operatorname{Sin} bx}{a^2 + b^2}$$

$$S_1 = \int e^{ax}\operatorname{Sin} bx\,dx = \frac{a\,e^{ax}\operatorname{Sin} bx - b\,e^{ax}\operatorname{Cos} bx}{a^2 + b^2}.$$

§ 102. Во всѣхъ предъидущихъ примѣрахъ величина интеграла выражалась при помощи тѣхъ простѣйшихъ функцій,

которыя были перечислены въ § 16, въ этомъ случаѣ говорятъ, что величина интеграла выражается въ *конечномъ* видѣ.

Но кромѣ исчисленныхъ существуетъ безчисленное множество другихъ функцій отъ нихъ различныхъ, поэтому нельзя и требовать, чтобы всякій неопредѣленный интегралъ выражался въ конечномъ видѣ, въ большей части случаевъ это окажется невозможнымъ, поэтому приведемъ простѣйшіе изъ тѣхъ немногочисленныхъ классовъ неопредѣленныхъ интеграловъ, которые выражаются въ конечномъ видѣ, и укажемъ примѣненіе вышеизложенныхъ пріемовъ для ихъ нахожденія. Самый простой изъ этихъ классовъ составляютъ интегралы отъ раціональныхъ функцій, съ которыхъ и начнемъ.

ГЛАВА XIII.

Интегрированіе функцій раціональныхъ.

Интегрированіе цѣлыхъ функцій.

§ 103. Простѣйшія изъ раціональныхъ функцій цѣлыя, ихъ интегрированіе производится черезъ разложеніе и примѣненіе формулы интеграла степени.

Пусть дана цѣлая функція $F(x)$ степени n

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

причемъ a_0 не равно нулю, и надо найти интегралъ:

$$\int F(x)\,dx = \int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n)\,dx.$$

По теоремѣ объ интегралѣ суммы имѣемъ:

$$\int F(x)\,dx = a_0\int x^n\,dx + a_1\int x^{n-1}\,dx + \ldots + \ldots$$

$$+ \ldots . + a_{n-1}\int x\,dx + a_n\int dx =$$

$$= a_0\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_1}{n+2}x^{n+2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2}x^2 + a_n x + C$$

гдѣ C есть постоянная произвольная. Это уравненіе выражаетъ такую теорему:

Интегралъ отъ цѣлой функціи степени n есть новая цѣлая функція степени $n+1$.

Отсюда видно, что всякая цѣлая функція интегрируется въ конечномъ видѣ.

Интегрированіе раціональныхъ дробей.

§ 104. Положимъ теперь, что предложенная для интегрированія раціональная функція дробная

$$F(x) = \frac{H(x)}{Q(x)}$$

гдѣ $H(x)$ и $Q(x)$ суть двѣ цѣлыя функціи перемѣнной x.

Итакъ надо найти интегралъ

$$\int F(x)\,dx = \int \frac{H(x)}{Q(x)}\cdot dx.$$

Дробь $\frac{H(x)}{Q(x)}$ мы предположимъ несократимой т. е., что цѣлыя функціи $H(x)$ и $Q(x)$ не имѣютъ общаго дѣлителя цѣлаго относительно x, въ противномъ случаѣ слѣдуетъ на этого дѣлителя предложенную дробь сократить.

Если степень числителя выше или равна степени знаменателя, то можно выдѣлить въ дроби $\frac{H(x)}{Q(x)}$ цѣлую часть, выполняя по правиламъ алгебры дѣленіе многочлена $H(x)$ на $Q(x)$, до тѣхъ поръ пока не получится остатокъ, степень коего

ниже степени дѣлителя $Q(x)$ тогда, обозначая черезъ $K(x)$ частное и черезъ $P(x)$ сказанный остатокъ имѣемъ:

$$H(x) = Q(x) \cdot K(x) + P(x)$$

и слѣдовательно:

$$\frac{H(x)}{Q(x)} = K(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

и значитъ интегралъ

$$\int \frac{H(x)}{Q(x)}\,dx = \int K(x)\,dx + \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

Первый изъ интеграловъ правой части есть интегралъ цѣлой функціи, и найдется какъ показано въ § 103. Такимъ образомъ нахожденіе интеграла предложенной дроби сводится къ нахожденію интеграла такой дроби, у которой степень числителя *меньше* степени знаменателя, и эта дробь не сократимая, т. е. числитель и знаменатель не имѣютъ общихъ дѣлителей цѣлыхъ относительно x.

Положимъ, что знаменатель этой дроби $Q(x)$ степени n относительно x, такъ что

$$Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

причемъ коэффиціентъ a_0 не равенъ нулю, тогда степень числителя $P(x)$ не выше $n-1$.

Въ Высшей Алгебрѣ доказываются слѣдующія теоремы:

1) Всякое уравненіе $n^{\text{ой}}$ степени съ одною неизвѣстною x т. е. всякое уравненіе вида:

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

имѣетъ n корней вещественныхъ или мнимыхъ.

2) Если обозначить черезъ $F(x)$ первую часть вышеупомянутаго уравненія, т. е. если

$$F(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

и черезъ

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots \ldots \beta_n$$

корни уравненія $F(x) = 0$, то функція $F(x)$ разлагается на произведеніе слѣдующихъ n двучленныхъ множителей:

$$F(x) = A_0 (x - \beta_1) (x - \beta_2) \ldots (x - \beta_n).$$

3) Если всѣ коэффиціенты: $A_0, A_1 \ldots A_n$ въ уравненіи вещественные, и это уравненіе имѣетъ мнимые корни, то эти корни попарно сопряженные, т. е. если одинъ изъ корней напримѣръ

$$\beta_k = a + b\sqrt{-1}$$

то есть другой корень β_l ему сопряженный т. е. такой:

$$\beta_l = a - b\sqrt{-1}$$

Ясно что произведеніе

$$(x - \beta_k)(x - \beta_l) =$$

$$= \left[(x-a) - b\sqrt{-1}\right] \cdot \left[(x-a) + b\sqrt{-1}\right] =$$

$$= (x-a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$$

не содержитъ мнимаго знака.

Отсюда слѣдуетъ, что всякая цѣлая функція $F(x)$ съ вещественными коэффиціентами разлагается на вещественные мно-

жители *первой* и *второй* степени относительно x т. е. вида:

$$(x+c) \text{ и } (x^2+px+q).$$

Какъ видно разложеніе функціи $F(x)$ на такіе множители равносильно рѣшенію уравненія $F(x)=0$.

Такъ какъ изложеніе способовъ рѣшенія уравненій высшихъ степеней все входитъ въ объемъ нашего курса; то мы будемъ предполагать, что знаменатель $Q(x)$ нашей дроби задается разложеннымъ на множители *первой* степени т. е. предпредположимъ что:

$$Q(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

тогда интегралъ

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{1}{a_0}\int \frac{P(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n)}\cdot dx.$$

Относительно дроби $\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)}$, которую мы по прежнему будетъ обозначать $\frac{P(x)}{Q(x)}$ надо различать два главныхъ случая:

1) Всѣ корни знаменателя между собою *неравные*.

2) Въ числѣ корней знаменателя есть корни равные между собою.

Каждый изъ этихъ двухъ случаевъ подраздѣляется въ свою очередь на два: а) когда всѣ корни вещественные, б) когда есть корни мнимые.

Начнемъ съ перваго случая т. е. положимъ, что всѣ корни знаменателя между собою *неравные*.

Покажемъ во первыхъ, что въ этомъ случаѣ дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можетъ быть разложена *однимъ единственнымъ* способомъ на сумму двухъ дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ A_1 есть нѣкоторая постоянная,

$$Q_1(x) = (x - \alpha_2)\,(x - \alpha_3) \ldots . (x - \alpha_n)$$

и $P_1(x)$ есть цѣлая функція отъ x, степень коей не выше $n - 2$.

Чтобы доказать формулу (1) надо показать какъ опредѣлить A_1 и функцію $P_1(x)$.

Приведя правую часть равенства (1) къ одному знаменателю, который будетъ

$$Q(x) = (x - \alpha_1) \cdot Q_1(x)$$

и отбросивъ въ обѣихъ частяхъ равенства этого общаго знаменателя, получимъ:

$$P(x) = A_1 Q_1(x) + (x - \alpha_1) P_1(x)$$

откуда слѣдуетъ:

$$P_1(x) = \frac{P(x) - A_1 Q_1(x)}{x - \alpha_1} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Коэффиціентъ A_1 надо теперь опредѣлить такъ, чтобы $P_1(x)$ было цѣлою функціей отъ x, значитъ надо, чтобы цѣлая функція $P_1(x) - A_1 Q_1(x)$ дѣлилась на $x - \alpha_1$ безъ остатка, а для этого надо, чтобы эта функція обращалась въ 0, когда вмѣсто x будетъ подставлено α_1 т. е. чтобы было:

$$P(\alpha_1) - A_1 \cdot Q_1(\alpha_1) = 0$$

откуда

$$A_1 = \frac{P(\alpha_1)}{Q_1(\alpha_1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Какъ видно A_1 имѣетъ *одно* вполнѣ опредѣленное значеніе отличное отъ нуля ибо $P(\alpha_1)$ не равно нулю т. к. $P(x)$ и

$Q(x)$ не имѣютъ общихъ множителей, $Q_2(\alpha_1)$ не равно нулю ибо корни α_2, α_3 . . . α_n по предположенію отличны отъ α_1. Подставляя эту величину A_1 въ фор. (2) мы получимъ для $P_1(x)$ цѣлую функцію степени не выше $n-2$, ибо степень $P(x)$ не выше $(n-1)$ и степень $Q_1(x)$ есть $n-1$, значитъ степень функціи $P(x) - A_1 Q_1(x)$ не выше $n-1$ и по раздѣленіи на $x-\alpha_1$, получится частное, коего степень будетъ не выше $n-2$.

Такимъ образомъ получимъ равенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

которое какъ видно изъ предыдущаго разсужденія будетъ имѣть мѣсто при *всякомъ* значеніи x, и слѣдовательно есть *тожество*. Нетрудно также видѣть что $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ не будутъ имѣть общихъ дѣлителей цѣлыхъ относительно x, дѣйствительно написавъ тожество (1) въ видѣ:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1 Q_1(x) + (x-\alpha_1) P_1(x)}{(x-\alpha_1) \cdot Q_1(x)}$$

ясно, что всякій дѣлитель общій функціямъ $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ былъ бы и общимъ дѣлителемъ функцій $P(x)$ и $Q(x)$, а таковыхъ по предположенію нѣтъ.

Въ силу доказанной теоремы дробь $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ можетъ быть разложена подобно дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, и у насъ будетъ тожество

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

причемъ A_2 будетъ имѣть одно вполнѣ опредѣленное значеніе функціи $P_2(x)$ и $Q_2(x)$ будутъ взаимно простыя и степень $P_2(x)$ будетъ меньше $Q_2(x)$.

Дробь $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ разложится подобнымъ-же образомъ, такъ что мы получимъ рядъ *тожествъ*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

$$\frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{A_3}{x-\alpha_3} + \frac{P_3(x)}{Q_3 x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1'')$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{P_{n-2}(x)}{Q_{n-2}(x)} = \frac{A_{n-1}}{x-\alpha_{n-1}} + \frac{P_{n-1}(x)}{Q_{n-1}(x)}$$

$$\frac{P_{n-1}(x)}{Q_{n-1}(x)} = \frac{A_n}{x-\alpha_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1^{(n)}).$$

Сложивъ эти тожества получимъ новое тожество:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \frac{A_3}{x-\alpha_3} + \ldots + \frac{A_n}{x-\alpha_n} \quad . \quad (I)$$

и такое тожество можетъ быть лишь *одно*, ибо каждый изъ коэффиціентовъ A_1, A_2 . . . . A_n могъ имѣть лишь одно значеніе, поэтому какимъ бы путемъ значенія этихъ коэффиціентовъ вычислены ни были, результатъ будетъ всегда одинъ и тотъ-же.

Для вычисленія коэффиціентовъ A_1, A_2, ... A_n можно примѣнить такой пріемъ. Сдѣлаемъ для краткости письма слѣдующее обозначеніе:

$$\frac{Q(x)}{x-\alpha_1} = (x-\alpha_2)(x-\alpha_3) \ldots . (x-\alpha_n) = \varphi_1(x)$$

$$\frac{Q(x)}{x-\alpha_2} = (x-\alpha_1)(x-\alpha_3) \ldots . (x-\alpha_n) = \varphi_2(x)$$

. . . . . .

$$\frac{Q(x)}{x-\alpha_i} = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\ldots(x-\alpha_n) = \\ = \varphi_i(x)$$

и т. д.

Тогда изъ тожества I будетъ слѣдовать такое:

$$P(x) = A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + A_3\varphi_3(x) + \ldots + A_n\varphi_n(x)$$

а такъ какъ это равенство имѣетъ мѣсто при всякомъ значеніи x, то положивъ $x = \alpha_i$ и замѣтивъ, что всѣ функціи φ_1, $\varphi_2 \ldots \varphi_n$ обратятся въ нуль, кромѣ $\varphi_i(x)$, то получимъ:

$$P(\alpha_i) = A_i \cdot \varphi_i(\alpha_i).$$

Но такъ какъ

$$Q(x) = (x - \alpha_i) \cdot \varphi_i(x)$$

то

$$Q'(x) = \varphi_i(x) + (x - \alpha_i)\varphi_i'(x)$$

дѣлая здѣсь $x = \alpha_i$ имѣемъ:

$$\varphi_i(\alpha_i) = Q'(\alpha_i)$$

и слѣдовательно:

$$A_i = \frac{P(\alpha_i)}{\varphi_i(\alpha_i)} = \frac{P(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)} \quad \ldots\ldots \text{II.}$$

дѣлая здѣсь $i = 1, 2, 3, \ldots n$ имѣемъ:

$$A_1 = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}; \; A_2 = \frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)} \ldots A_n = \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)} \quad \text{(II).}$$

Итакъ имѣемъ теорему: *Раціональная дробь* $\frac{P(x)}{Q(x)}$, *у которой степень числителя ниже степени знаменателя, и знаменатель не имѣетъ кратныхъ корней, разлагается однимъ способомъ на сумму простѣйшихъ дробей, такъ что имѣетъ мѣсто тожество:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-\alpha_n} \quad \ldots \text{I.}$$

причемъ:

$$Q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots . (x - \alpha_n)$$

т. е. величины $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots . \alpha_n$ *суть корни уравненія* $Q(x) = 0$ *и коэффиціенты* A_i *опредѣляются формулою*

$$A_i = \frac{P(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)} \ldots \ldots \ldots \text{(II)}.$$

При выводѣ формулъ I и II мы не дѣлали никакихъ предположеній относительно вещественности корней α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$, обѣ эти формулы будутъ имѣть мѣсто и въ томъ случаѣ, когда нѣкоторые или всѣ корни *мнимые.*

Но когда коэффиціенты въ функціяхъ $P(x)$ и $Q(x)$ вещественные, то желательно и въ окончательномъ результатѣ избѣжать мнимыхъ знаковъ, чего мы и достигнемъ, складывая по парно тѣ двѣ дроби, которыя заключаютъ въ знаменателяхъ сопряженные корни уравненія $Q(x) = 0$.

Итакъ пусть α_1 и α_2 будетъ пара такихъ сопряженныхъ мнимыхъ корней и пусть:

$$\alpha_1 = \beta_1 + \gamma_1\sqrt{-1},$$

тогда

$$\alpha_2 = \beta_1 - \gamma_1\sqrt{-1}$$

коэффиціенты A_1 и A_2 будутъ

$$A_1 = \frac{P(\beta_1 + \gamma_1\sqrt{-1})}{Q'(\beta_1 + \gamma_1\sqrt{-1})} = C + D\sqrt{-1}$$

$$A_2 = \frac{P(\beta_1 - \gamma_1\sqrt{-1})}{Q'(\beta_1 - \gamma_1\sqrt{-1})} = C - D\sqrt{-1}$$

также сопряженные между собою, и дроби соотвѣтствующія корнямъ α_1 и α_2 будутъ вида:

$$\frac{C + D\sqrt{-1}}{(x - \beta_1) - \gamma_1\sqrt{-1}} + \frac{(C - D\sqrt{-1}}{(x - \beta_1) + \gamma_1\sqrt{-1}}$$

сумма этихъ двухъ дробей будетъ вещественная дробь

$$\frac{Mx+N}{(x-\beta_1)^2+\gamma_1^2}$$

гдѣ $M=2C$ и $N=-2(C\beta_1+D\gamma_1)$.

Такимъ образомъ: *каждыя двѣ дроби въ тожествѣ (I), соотвѣтствующія парѣ сопряжённыхъ мнимыхъ корней складываются въ одну вещественную дробь вида*

$$\frac{Mx+N}{(x-\beta)^2+\gamma^2}.$$

Обратимся теперь къ случаю, когда въ числѣ корней знаменателя есть корни равные между собою.

Пусть напримѣръ

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3\ \ldots\ =\alpha_k$$

есть k кратный корень знаменателя, такъ что

$$Q(x)=(x-\alpha_1)^k\cdot(x-\alpha_{k+1})(x-\alpha_{k+2})\ \ldots\ (x-\alpha_n)$$

причемъ въ числѣ прочихъ корней

$$\alpha_{k+1},\ \alpha_{k+2},\ \ldots\ \alpha_n$$

могутъ быть и равные между собою, но нѣтъ равныхъ корню α_1.

Обозначимъ черезъ $Q_1(x)$ произведеніе

$$(x-\alpha_{k+1})(x-\alpha_{k+2})\ \ldots\ (x-\alpha_n)=Q_1(x)$$

такъ что

$$Q(x)=(x-\alpha_1)^k\cdot Q_1(x)$$

и покажемъ что дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можетъ быть разложена однимъ единственнымъ способомъ на сумму слѣдующихъ двухъ дробей

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^k\, Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha_1)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-\alpha_1)^{k-1}\cdot Q_1(x)}$$

гдѣ $P_1(x)$ есть цѣлая функція x, степень коей не выше $n-2$.

Разсуждая совершенно подобно тому какъ въ 1-мъ случаѣ, получимъ равенство:

$$P(x) = A_1 \cdot Q_1(x) + (x-\alpha_1) P_1(x)$$

откуда

$$P_1(x) = \frac{P(x) - A_1 Q_1(x)}{x-\alpha_1}$$

и чтобы $P_1(x)$ было цѣлою функціей x надо взять A_1 такъ, чтобы было

$$P(\alpha_1) - A_1 Q_1(\alpha_1) = 0$$

откуда

$$A_1 = \frac{P(\alpha_1)}{Q_1(\alpha_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

и слѣдовательно для A_1 получается одно, конечное отличное отъ нуля значеніе, при которомъ имѣетъ мѣсто тожество:

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^k\, Q_1(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha_1)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-\alpha_1)^{k-1}\cdot Q_1(x)} \quad . \quad . \quad (2).$$

Поступая съ дробью $\frac{P_1(x)}{(x-\alpha_1)^{k-1}\cdot Q_1(x)}$ совершенно также какъ съ дробью $\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^k\, Q_1(x)}$ получимъ тожество:

$$\frac{P_1(x)}{(x-\alpha_1)^{k-1}\, Q_1(x)} = \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^{k-2}} + \frac{P_2(x)}{(x-\alpha_1)^{k-2}\, Q_1(x)} \quad . \quad (2')$$

и продолжая дѣйствовать такимъ-же образомъ далѣе, получимъ такой рядъ тожествъ:

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^k\, Q_1(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha_1)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-\alpha_1)^{k-1}\, Q_1(x)}$$

$$\frac{P_1(x)}{(x-\alpha_1)^{k-1}\, Q_1(x)} = \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^{k-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-\alpha_1)^{k-2}\, Q_1(x)}$$

$$\frac{P_2(x)}{(x-\alpha_1)^{k-2}\, Q_1(x)} = \frac{A_3}{(x-\alpha_1)^{k-2}} + \frac{P_3(x)}{(x-\alpha_1)^{k-3}\, Q_1(x)}$$

. . . . . .

$$\frac{P_{k-1}(x)}{(x-\alpha_1)\cdot Q_1(x)} = \frac{A_k}{x-\alpha_1} + \frac{P_k(x)}{Q_1(x)}$$

сложивъ которыя получаемъ *тожество*

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^k\, Q_1(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha_1)^k} + \frac{A_2}{((x-\alpha_1)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{(x-\alpha_1)} + \frac{P_k(x)}{Q_1(x)}$$

причемъ знаменатель дроби $\frac{P_k(x)}{Q_1(x)}$ корня α_1, не содержитъ, и степень числителя этой дроби ниже степени знаменателя и дробь несократимая.

Съ этою дробью поступимъ опять подобно тому какъ съ дробью $\frac{P(x)}{Q(x)}$ и разложимъ ее на простѣйшія дроби, причемъ каждый кратный корень знаменателя дастъ столько простѣйшихъ дробей, какова кратность этого корня, всякій простой дастъ одну дробь.

Такимъ образомъ дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, когда знаменатель ея $Q(x)$ будетъ вида:

$$Q(x) = (x-\alpha)^k\,(x-\beta)^l\,(x-\gamma)^m\cdot(x-\delta)\,(x-\varepsilon)\cdots(x-\lambda)$$

разложится *однимъ* образомъ на слѣдующую сумму простѣйшихъ дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{x-\alpha} +$$
$$+ \frac{B_1}{(x-\beta)^l} + \frac{B_2}{(x-\beta)^{l-1}} + \ldots + \frac{B}{x-\beta} +$$
$$+ \frac{C_1}{(x-\gamma)^m} + \frac{C_2}{(x-\gamma)^{m-1}} + \ldots + \frac{C_m}{x-\gamma} +$$
$$+ \frac{D}{x-\delta} + \frac{E}{x-\varepsilon} + \ldots + \frac{L}{x-\lambda}.$$

§ 104. Остается еще разсмотрѣть тотъ случай, когда у знаменателя $Q(x)$ есть кратные мнимые корни.

Пусть

$$Q(x) = (x^2+px+q)^k \cdot Q_1(x)$$

причемъ корни трехчлена

$$x^2+px+q$$

мнимые, функція-же $Q_1(x)$ множителя x^2+px+q не содержитъ.

Покажемъ, что въ этомъ случаѣ дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ разлагается на сумму слѣдующихъ двухъ дробей:

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^k\, Q_1(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}\, Q_1(x)} \quad \ldots (3)$$

причемъ степень $P_1(x)$ ниже степени знаменателя и эта цѣлая функція взаимно простая съ $Q_1(x)$.

Чтобы доказать равенство (3) поступимъ совершенно подобно предъидущему, тогда получимъ равенство:

$$P(x) = (x^2+px+q)\, P_1(x) + (Mx+N)\, Q_1(x)$$

откуда

$$P_1(x) = \frac{P(x) - (Mx+N)\,Q_1(x)}{x^2+px+q}$$

чтобы функція $P_1(x)$ была цѣлая надо опредѣлить M и N такъ чтобы

$$P(x) - (Mx+N)\,.\,Q_1(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

дѣлилось на x^2+px+q безъ остатка.

Пусть

$$x^2+px+q = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$$

(по предположенію α_1 и α_2 мнимые, слѣдовательно сопряженные между собою и очевидно неравныя величины). Тогда необходимо чтобы многочленъ (*) обращался въ нуль какъ при $x=\alpha_1$ такъ и при $x=\alpha_2$, т. е. чтобы было:

$$P(\alpha_1) - (M\alpha_1+N)\,Q_1(\alpha_1) = 0$$
$$P(\alpha_2) - (M\alpha_2+N)\,Q_1(\alpha_2) = 0$$

или иначе:

$$M\alpha_1+N = \frac{P(\alpha_1)}{Q_1(\alpha_1)}$$
$$M\alpha_2+N = \frac{P(\alpha_2)}{Q(\alpha_2)}.$$

Откуда слѣдуетъ:

$$M = \left[\frac{P(\alpha_1)}{Q(\alpha_1)} - \frac{P(\alpha_2)}{Q(\alpha_2)}\right]\cdot\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}$$
$$N = \left[\frac{P(\alpha_2)}{Q(\alpha_2)}\cdot\alpha_1 - \frac{P(\alpha_1)}{Q(\alpha_1)}\alpha_2\right]\cdot\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}$$

и не трудно убѣдиться, что когда α_1 и α_2 сопряженные, то M и N вещественные, и имѣютъ каждое одно вполнѣ опредѣленное конечное значеніе, и такимъ образомъ получится *тожество*:

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^k\,Q_1(x)} = \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}\,Q_1(x)}$$

изъ котораго подобно предыдущему увидимъ, что въ этомъ случаѣ предложенная дробь разложится на сумму такихъ:

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^k\,Q_1(x)} = \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \\ + \frac{M_3x+N_3}{(x^2+px+q)^{k-2}} + \ldots + \frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q} + \frac{P_k(x)}{Q_1(x)}$$

причемъ знаменатель послѣдней дроби не будетъ содержать множителя x^2+px+q.

Замѣтимъ еще разъ, что корни трехчлена x^2+px+q предполагаются мнимыми и слѣдовательно этотъ трехчленъ можетъ быть представленъ въ видѣ:

$$x^2+px+q = (x-\beta)^2+\gamma^2$$

гдѣ

$$\beta = -\frac{p}{2} \quad \text{и} \quad \gamma^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

§ 105. Резюмируя все вышеизложенное относительно разложенія раціональной дроби на сумму простѣйшихъ дробей, мы можемъ написать слѣдующую общую формулу:

Пусть дана раціональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ степень числителя который меньше степени знаменателя, и знаменатель которой разлагается на слѣдующіе множители:

$$Q(x) = (x-\alpha)^k(x-\beta)^l(x-\gamma)^m(x^2+px+q)^h \\ (x^2+gx+f)(x-\delta)(x-\varepsilon)$$

причемъ предполагается, что корни трехчленовъ x^2+px+q и x^2+gx+f мнимые, тогда предложенная дробь можетъ быть разложена на сумму показанныхъ ниже простѣйшихъ дробей причемъ для коэффиціентовъ

$$A_1, A_2, \ldots A_k, \; B_1, B_2 \ldots B_l \ldots . M_1, N_1 \ldots D, E$$

имѣется одна единственная система такихъ значеній, при которыхъ нижеписанная формула III представляетъ собою тожество:

$$\text{III} \ldots \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{x-\alpha} +$$
$$+ \frac{B_1}{(x-\beta)^l} + \frac{B_2}{(x-\beta)^{l-1}} + \ldots + \frac{B^l}{x-\beta} +$$
$$+ \frac{C_1}{(x-\gamma)^m} + \frac{C_2}{(x-\gamma)^{m-1}} + \ldots + \frac{C^m}{x-\gamma} +$$
$$+ \frac{M_1 x + N_1}{(x^2+px+q)^n} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \ldots \frac{M_n x + N_n}{x^2+px+q} +$$
$$+ \frac{Gx+H}{x^2+gx+f} + \frac{D}{x-\delta} + \frac{E}{x-\varepsilon},$$

Такъ какъ написанная формула представляетъ собою тожество, и всѣ коэффиціенты имѣютъ одно вполнѣ опредѣленное значеніе, то ихъ можно вычислять какимъ угодно образомъ,—результатъ будетъ одинъ и тотъ же.

Для вычисленія коэффиціентовъ при разложеніи раціональной дроби на простѣйшія существуетъ много различныхъ пріемовъ. Самый общій изъ этихъ пріемовъ есть методъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ состоящій въ томъ, что написавъ общій видъ разложенія данной дроби, на частныя, обозначаютъ коэффиціенты въ частныхъ дробяхъ буквами, приводятъ затѣмъ всю дробь къ одному знаменателю, который будетъ $Q(x)$ и отбросивъ его въ обѣихъ частяхъ равенства получаютъ въ лѣвой части заданный многочленъ $P(x)$, а въ правой многочленъ степень коего на 1 меньше степени $Q(x)$, эти оба многочлена должны быть *тожественны* между собою, значитъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x въ обѣихъ частяхъ равенства должны быть равны между собою. Уравнявъ эти коэффиціенты и получимъ для опредѣленія неизвѣстныхъ

$$A_1, A_2, \ldots A_k, B_1, B_2 \ldots B_m \ldots\ldots M_n, N_n, \ldots E$$

столько уравненій первой степени относительно этихъ неизвѣстныхъ, сколько этихъ неизвѣстныхъ. Эти уравненія и послужатъ для опредѣленія сказанныхъ неизвѣстныхъ.

Какъ этотъ пріемъ такъ и другіе будутъ пояснены на рядѣ примѣровъ, а пока докончимъ изложеніе общей методы интегрированія раціональной дроби.

§ 106. Итакъ предложенный интегралъ

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

послѣ того какъ дробь будетъ разложена на сумму простѣйшихъ дробей, также разложится на сумму интеграловъ слѣдующихъ четырехъ видовъ:

$$\int \frac{A\,dx}{x-\alpha}\;;\quad \int \frac{B\,dx}{(x-\beta)^k}$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\,dx\;;\quad \int \frac{Mx+N}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^k}\,dx$$

и останется найти эти интегралы.

Очевидно будетъ:

$$1)\quad \int \frac{A\,dx}{x-\alpha} = A\int \frac{d(x-\alpha)}{x-\alpha} = A\log(x-\alpha)+C$$

$$2)\quad \int \frac{B\,dx}{(x-\beta)^k} = B\int (x-\beta)^{-k}\,d(x-\beta) =$$

$$= -\frac{B}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-\beta)^{k-1}}+C$$

$$3)\quad \int \frac{Mx+N}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\cdot dx = \int \frac{M(x-\beta)\,dx}{(x-\beta)^2+\gamma^2}+(N+M\beta)\int \frac{dx}{(x-\beta)^2+\gamma^2}$$

$$= \frac{1}{2}M\int \frac{2(x-\beta)\cdot d(x-\gamma)}{(x-\beta)^2+\gamma^2}+\frac{N+M\beta}{\gamma}\cdot\int \frac{d\left(\frac{x-\beta}{\gamma}\right)}{1+\left(\frac{x-\beta}{\gamma}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}M\log\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]+\frac{N+M\beta}{\gamma}\operatorname{arc\ tg}\frac{x-\beta}{\gamma}+C.$$

Замѣтимъ, что когда знаменатель написанъ въ видѣ x^2+px+q, то чтобы примѣнить предыдущую формулу, надо сперва представить его въ видѣ суммы двухъ квадратовъ.

Очевидно будетъ:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$$

и т. к. корни трехчлена мнимые то $q-\frac{p^2}{4}>0$ и слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\beta=-\frac{p}{2};\ \gamma=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$$

Остается найти четвертый изъ этихъ интегралов, именно:

$$4)\qquad \int\frac{Mx+N}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^k}\cdot dx=\int\frac{M(x-\beta)\,dx}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^k}+$$

$$+(N+M\beta)\int\frac{dx}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^k}$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{2(x-\beta)\,dx}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^k}+(N+M\beta)\int\frac{dx}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^k}=$$

$$=\frac{M}{2}\int[(x-\beta)^2+\gamma^2]^{-k}\,d\,[(x-\beta)^2+\gamma^2]+$$

$$+(N+M\beta)\int\frac{dx}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^k}$$

$$=-\frac{M}{2(1-k)}\cdot\frac{1}{[(x^2-\beta)^2+\gamma^2]^{k-1}}+(N+M\beta)\int\frac{dx}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^k}.$$

Чтобы найти интегралъ

$$\int\frac{dx}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^k}$$

положимъ

$$x-\beta=\gamma z$$

тогда

$$dx=\gamma\cdot dz$$

и

$$(x-\beta)^2+\gamma^2=\gamma^2[z^2+1]$$

слѣдовательно будетъ:

$$\int \frac{dx}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^k} = \frac{1}{\gamma^{2k-1}} \int \frac{dz}{(z^2+1)^k}$$

Чтобы найти интегралъ $\int \frac{dz}{(z^2+1)^k}$ обозначимъ его черезъ S_k и выведемъ такъ называемую *формулу приведенія*, по которой предложенный интегралъ сводится къ другому того-же самаго вида, но гдѣ показатель k на 1 меньше.

Итакъ пусть будетъ:

$$S_k = \int \frac{dz}{(z^2+1)^k} = \int \frac{(z^2+1-z^2)\,dz}{(z^2+1)^k} =$$
$$= \int \frac{dz}{(z^2+1)^{k-1}} - \int \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^k} =$$
$$= S_{k-1} - \int \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^k}$$

Чтобы преобразовать послѣдній интегралъ примѣнимъ способъ интегрированія по частямъ.

Имѣемъ:

$$\int \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^k} = \frac{1}{2} \int z \cdot \frac{2z\,dz}{(z^2+1)^k} =$$
$$= -\frac{1}{2(k-1)} \cdot \frac{z}{(z^2+1)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)} \int \frac{dz}{(z^2+1)^{k-1}} =$$
$$= -\frac{1}{2k-2} \cdot \frac{z}{(z^2+1)^{k-1}} + \frac{1}{2k-2} \cdot S_{k-1}$$

подставляя получаемъ:

$$S_k = S_{k-1} + \frac{1}{2k-2} \cdot \frac{z}{(z^2+1)^{k-1}} - \frac{1}{2k-2} \cdot S_{k-1}$$

откуда слѣдуетъ:

$$S_k = \frac{1}{2k-2} \cdot \frac{z}{(z^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2} \cdot S_{k-1} \quad . \quad . \quad (5)$$

это и есть требуемая формула приведенія.

На основаніи этой формулы имѣемъ послѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned}
S_{k-1} &= \frac{1}{2k-4}\cdot\frac{z}{(z^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-5}{2k-4}\cdot S_{k-2}\\
S_{k-2} &= \frac{1}{2k-6}\cdot\frac{z}{(z^2+1)^{k-3}} + \frac{2k-6}{2k-6}\cdot S_{k-3}\\
S_{k-3} &= \frac{1}{2k-8}\cdot\frac{z}{(z^2+1)^{k-4}} + \frac{2k-9}{2k-8}\cdot S_{k-4}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
S_3 &= \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{(z^2+1)} + \frac{3}{4}\cdot S_2\\
S_2 &= \frac{1}{4}\cdot\frac{z}{(z^2+1)} + \frac{1}{2}\cdot S_1\\
S_1 &= \operatorname{arc\,tg} z
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Умноживъ соотвѣтственно формулы (6)

первую на $\cdots\cdots\cdots \frac{2k-3}{2k-2}$,

вторую на $\cdots\cdots\cdots \frac{2k-3}{2k-2}\cdot\frac{2k-5}{2k-4}$,

третью на $\cdots\cdots\cdots \frac{2k-3}{2k-2}\cdot\frac{2k-5}{2k-4}\cdot\frac{2k-7}{2k-6}$

$\cdots\cdots\cdots$ и т. д. $\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

предпослѣднюю на $\cdots \frac{2k-3}{2k-2}\cdot\frac{2k-5}{2k-4}\cdot\frac{2k-7}{2k-6}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}$

послѣднюю на $\cdots\cdots \frac{2k-3}{2k-2}\cdot\frac{2k-5}{2k-4}\cdot\frac{2k-7}{2k-6}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}$

и сложивъ полученные результаты съ формулой (5) найдемъ:

$$S_k = \frac{z}{2k-2}\left[\frac{1}{(z^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-4}\cdot\frac{1}{(z^2+1)^{k-2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{2k-3}{2k-4}\cdot\frac{2k-5}{2k-6}\cdot\frac{1}{(z^2+1)^{k-3}} + \cdots\right.$$

$$\cdots + \frac{2k-3}{2k-4} \cdot \frac{2k-5}{2k-6} \cdot \frac{2k-7}{2k-8} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{z^2+1} \Big]$$

$$+ \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \frac{2k-5}{2k-4} \cdot \frac{2k-7}{2k-6} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} z \,. \quad . \quad \text{(IV)}.$$

Такъ напримѣръ:

$$S_3 = \int \frac{dz}{(1+z^2)^3}$$

получится, положивъ въ формулу IV, $k = 3$ и будетъ:

$$S_3 = \frac{z}{4}\left[\frac{1}{(z^2+1)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{z^2+1}\right] + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} z.$$

Чтобы отъ интеграла $S_k = \int \frac{dz}{(z^2+1)^k}$ перейти къ интегралу

$$\int \frac{dx}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^k}$$

стоитъ только въ найденной величинѣ S_k замѣнить z его выраженіемъ черезъ x именно

$$z = \frac{x-\beta}{\gamma}.$$

Итакъ мы получаемъ такую теорему. *Интегралъ всякой раціональной дроби выражается въ конечномъ видѣ при помощи функцій: алгебраическихъ раціональныхъ, логариѳмовъ и тригонометрическихъ.*

§ 107. Дадимъ теперь рядъ примѣровъ на интегрированіе раціональныхъ дробей, въ которомъ какъ видно главная часть выкладокъ состоитъ въ разложеніи предложенной дроби на простѣйшія.

Примѣръ 1-й. Найти интегралъ

$$\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2} \cdot dx.$$

Во 1-хъ разлагаемъ знаменателя на множители

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2),$$

слѣдовательно дробь разложится на такія двѣ простыя

$$\frac{2x-1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

Для вычисленія коэффиціентовъ A и B составляемъ выраженіе:

$$\frac{P(x)}{Q'(x)} = \frac{2x-1}{2x-3}$$

положивъ въ которомъ $x = 1$ получимъ

$$A = \frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{2-1}{2-3} = -1$$

и положивъ $x = 2$, получимъ

$$B = \frac{P(2)}{Q'(2)} = \frac{4-1}{4-3} = 3.$$

Слѣдовательно дробь:

$$\frac{2x-1}{x^2-3x+2} = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

и значитъ интегралъ

$$\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}\,dx = 3\int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x-1} = \log \frac{(x-2)^3}{x-1} + C.$$

2-й примѣръ. Найти интегралъ

$$\int \frac{x^5}{x^3-1}\cdot dx$$

во первыхъ отдѣливъ въ предложенной дроби цѣлую часть, имѣемъ:

$$\frac{x^5}{x^3-1} = x^2 + \frac{x^2}{x^3-1}$$

и разлагаемъ знаменателя на множители

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1),$$

поэтому дробь $\frac{x^2}{x^3-1}$ разложится слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{x^2}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

Примѣняя способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, должны имѣть тожество:

$$x^2 = A(x^2+x+1) + (Mx+N)(x-1) =$$
$$= (A+M)x^2 + (A+N-M)x + A - N,$$

которое требуетъ чтобы A, M и N удовлетворяли уравненіямъ:

$$A + M = 1$$
$$A + N - M = 0$$
$$A - N = 0$$

изъ которыхъ находимъ

$$A = N = \frac{1}{3};\ M = \frac{2}{3}$$

и слѣдовательно

$$\frac{x^5}{x^3-1} = x^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)$$

значитъ

$$\int \frac{x^5\,dx}{x^3-1} = \int x^2\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\cdot dx =$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}\log(x-1) + \frac{1}{3}\log(x^2+x+1) =$$
$$= \frac{1}{3}\left[x^3 + \log(x^3-1)\right] + C.$$

Примѣръ 3-й. Найти интегралъ:

$$S = \int \frac{x^2 - 3x - 2}{(x^2 + x + 1)^2 (x + 1)^2} \cdot dx.$$

Подъинтегральная дробь разлагается на простѣйшія слѣдующаго вида:

$$\frac{x^2 - 3x - 2}{(x + x + 1)^2 (x + 1)^2} = \frac{A}{(x + 1)^2} + \frac{A_1}{x + 1} + \frac{Bx + C}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{Dx + E}{x^2 + x + 1}$$

отсюда слѣдуетъ тожество:

$$x^2 - 3x - 2 = A(x^2 + x + 1)^2 + A_1(x + 1)(x^2 + x + 1)^2 +$$
$$+ (Bx + C)(x + 1)^2 + (Dx + E)(x + 1)^2 (x^2 + x + 1) \ldots (\text{I})$$

это тожество должно имѣть мѣсто при всякомъ x, поэтому можемъ давать x любыя частныя значенія.

Сдѣлавъ $x = -1$, получимъ

$$2 = A \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Такъ какъ производная всякаго тожества есть новое тожество, то взявъ отъ обѣихъ частей I производныя имѣемъ:

$$2x - 3 = 2A(x^2 + x + 1)(2x + 1) + A_1(x^2 + x + 1) +$$
$$+ (x + 1)\{ \ldots \ldots \}$$

остальные члены содержатъ множитель $x + 1$; положивъ опять $x = -1$ и подставивъ вмѣсто A его величину 2 имѣемъ:

$$-5 = -4 + A_1, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

откуда $\ldots \ldots \ldots \quad A_1 = -1.$

Чтобы найти C и D обращаемся опять къ тожеству (1), и положимъ въ немъ по очереди x равнымъ корнямъ уравненія

$$x^2+x+1=0.$$

Обозначимъ эти корни черезъ α и β, такъ что

$$\alpha^2+\alpha+1=0 \quad \text{и} \quad \beta^2+\beta+1=0$$

значитъ

$$\alpha^2=-\alpha-1 \quad \text{и} \quad \beta^2=-\beta-1 \quad . \quad . \quad . \quad (*).$$

Полагая $x=\alpha$ имѣемъ:

$$\alpha^2-3\alpha-2=(B\alpha+C)(\alpha+1)^2.$$

Въ силу равенства (*) послѣдовательно имѣемъ

$$-\alpha-1-3\alpha-2=(B\alpha+C)(\alpha^2+2\alpha+1)=$$
$$=(B\alpha+C)(+\alpha)=+B\alpha^2+C\alpha=-B(\alpha+1)+C\alpha$$

или:

$$(B-C-4)\alpha+B-3=0.$$

Точно также положивъ $x=\beta$ получимъ:

$$(B-C-4)\beta+B-3=0.$$

Откуда слѣдуетъ:

$$B-3=0 \quad \text{и} \quad B-C-4=0$$

значитъ:

$$B=3\ ;\ C=-1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Взявъ производную тожества I и отобравъ въ ней только тѣ члены, которые не умножаются на x^2+x+1, получимъ:

$$2x-3 = B(x+1)^2+2(Bx+C)(x+1)+$$
$$+(Dx+E)(x+1)^2(2x+1)+(x^2+x+1)\{\ldots.\}$$

положивъ $x=\alpha$ и пользуясь равенствомъ (*) имѣемъ: подставивъ вмѣсто B и C ихъ величины:

$$2\alpha-3 = 3\alpha+2(\alpha+1)(3\alpha-1)+(D\alpha+E).(\alpha)(2\alpha+1) =$$
$$= 3\alpha+2(3\alpha^2+2\alpha-1)+(D\alpha+E)(2\alpha^2+\alpha) =$$
$$= 3\alpha+2(-\alpha-4)+(D\alpha+E)(-\alpha-2)$$
$$= 3\alpha-2\alpha-8-D\alpha^2-2D\alpha-E\alpha-2E$$
$$= \alpha-8-D\alpha+D-E\alpha-2E$$

или

$$(D+E+1)\alpha+2E-D+5=0.$$

Очевидно что положивъ $x=\beta$ получили бы:

$$(D+E+1)\beta+(2E-D+5)=0.$$

Откуда слѣдуетъ, такъ какъ α и β нулю не равны и не равны между собою, что:

$$D+E+1=0.$$
$$2E-D+5=0.$$

Рѣшеніе этихъ уравненій даетъ:

$$\left.\begin{aligned} D &= 1 \\ E &= -2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Такимъ образомъ предложенная дробь разложится на слѣдующія простѣйшія:

$$\frac{x^2-3x-2}{(x^2+x+1)^2(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{3x-1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{x-2}{x^2+x+1}$$

и слѣдовательно заданный интегралъ будетъ:

$$S=2\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{3x-1}{(x^2+x+1)^2}\,dx+\int\frac{x-2}{x^2+x+1}\,dx=$$

$$=-\frac{2}{x+1}-\log(x+1)+\int\frac{(3x-1)\,dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}+$$

$$+\int\frac{x-2}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}\cdot dx$$

Чтобы найти послѣдніе два интеграла полагаемъ

$$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}z$$

такъ что

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}z-\frac{1}{2}\quad\text{и}\quad z=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\quad\text{и}\quad dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dz$$

тогда будетъ:

$$\int\frac{(x-2)\,dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}=\int\frac{z\,dz}{z^2+1}-\frac{5}{\sqrt{3}}\int\frac{dz}{z^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\log(z^2+1)-\frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\,z=$$

$$=\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)-\frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

и

$$\int \frac{3x-1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}\,dx = 4\int \frac{z\,dz}{(z^2+1)^2} - \frac{20\sqrt{3}}{9}\int \frac{dz}{(z^2+1)^2} =$$

$$= -2\cdot\frac{1}{z^2+1} - \frac{20\sqrt{3}}{9}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z\right] =$$

$$= -\frac{3}{2(x^2+x+1)} - \frac{5}{6}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{5x+7}{x^2+x+1} - \frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}},$$

подставляя найденныя величины въ выраженіе для S, получимъ:

$$\int \frac{x^2-3x-2}{(x^2+x+1)^2(x+1)^2} = -\frac{5x+7}{x^2+x+1} - \frac{2}{x+1} +$$

$$+\frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \log(x+1)$$

$$-\frac{25}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Примѣръ 4-й. Найти интегралъ

$$\int \frac{dx}{1+x^4}.$$

Чтобы разложить дробь $\frac{1}{1+x^4}$ на простѣйшія, разлагаемъ сперва знаменателя на множители второй степени относительно x:

Имѣемъ:

$$1+x^4 = 1+2x^2+x^4-2x^2 =$$

$$= (x^2+1)^2 - \left(\sqrt{2}\,x\right)^2 =$$

$$= \left(x^2+\sqrt{2}\,x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}\,.\,x+1\right).$$

Слѣдовательно

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}\,x+1};$$

коэффиціенты A, B, C, D, опредѣлимъ такъ, чтобы было тожественно:

$$1 = (Ax+B)\left(x^2 - x\sqrt{2}+1\right) +$$
$$+ (Cx+D)\left(x^2+\sqrt{2}\,x+1\right),$$

что дастъ уравненія:

$$0 = A + C$$
$$0 = B + D + \sqrt{2}\,(C - A)$$
$$0 = A + C + \sqrt{2}\,(D - B)$$
$$1 = B + D.$$

Откуда слѣдуетъ:

$$B = D = \frac{1}{2}$$
$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}}; \; C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

и значитъ:

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\left(x+\sqrt{2}\right)dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\left(x-\sqrt{2}\right)dx}{x^2-x\sqrt{2}+1} =$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{\left(2x+\sqrt{2}\right)dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$$
$$- \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,dx - \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} -$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Примѣръ 5-й. Найти интегралъ:

$$\int \frac{x^6\,dx}{1 + x^8}.$$

Чтобы разложить подъинтегральную дробь на простѣйшія, надо сперва разложить знаменателя на множители второй степени относительно x, ибо очевидно онъ не имѣетъ вещественныхъ корней.

Имѣемъ:

$$1 + x^8 = 1 + 2x^4 + x^8 - 2x^4 = (1 + x^4)^2 - \left(\sqrt{2}\,x^2\right)^2 =$$

$$= \left(1 + \sqrt{2}\,x^2 + x^4\right)\left(1 - \sqrt{2}\,x^2 + x^4\right).$$

Затѣмъ:

$$1 + \sqrt{2}\,x^2 + x^4 = 1 + 2x^2 + x^4 - \left(2 - \sqrt{2}\right)x^2 =$$

$$= (1 + x^2)^2 - \left(\sqrt{2 - \sqrt{2}}\,x\right)^2 =$$

$$\left(1 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}\,x + x^2\right)\left(1 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}\,x + x^2\right).$$

Совершенно также найдемъ:

$$1 - \sqrt{2}\,x^2 + x^4 =$$

$$\left(1 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}\,x + x^2\right)\left(1 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}\,x + x^2\right)$$

и слѣдовательно:

$$1+x^8=(1+\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x+x^2)(1-\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x+x^2)$$
$$(1+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x+x^2)(1-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x+x^2)$$

и значитъ предложенная дробь разлагается слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{x^6}{1+x^8}=\frac{A_1x+B_1}{1+\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x+x^2}+\frac{A_2x+B_2}{1-\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x+x^2}+$$
$$+\frac{A_3x+B_3}{1+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x+x^2}+\frac{A_4x+B_4}{1-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x+x^2}$$

Коэффиціенты $A_1, B_1 \ldots A_4, B_4$ можно опредѣлить или составивъ систему уравненій слѣдующую изъ того условія, чтобы предыдущая формула представляла тожество, т. е. поступить подобно тому, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, но проще будетъ вычислить ихъ слѣдующимъ образомъ.

Назовемъ черезъ α_1 и β_1 корни трехчлена

$$1+\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x+x^2$$

эти корни очевидно мнимые сопряженные.

Какъ было показано, дробь

$$\frac{A_1x+B_1}{1+\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x+x^2}$$

происходитъ отъ сложенія двухъ дробей вида:

$$\frac{C_1}{x-\alpha_1}+\frac{D_1}{x-\beta_1}$$

причемъ коэффиціенты C_1 и D_1 получатся если въ выраженіи

$$\frac{x^6}{(1+x^8)'} = \frac{x^6}{8x^7} = \frac{1}{8x}$$

положимъ $x = \alpha_1$ и затѣмъ $x = \beta_1$, такъ что:

$$C_1 = \frac{1}{8\alpha_1}; \quad D_1 = \frac{1}{8\beta_1}$$

и слѣдовательно сумма предыдущихъ двухъ дробей будетъ:

$$\frac{1}{8\alpha_1(x-\alpha_1)} + \frac{1}{8\beta_1(x-\beta_1)} = \frac{1}{8\alpha_1\beta_1} \cdot \frac{(\alpha_1+\beta_1)x - (\alpha_1^2+\beta_1^2)}{(x-\alpha_1)(x-\beta_1)}$$

Но по предположенію:

$$(x-\alpha_1)(x-\beta_1) = x^2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}\,x + 1$$

слѣдовательно:

$$\alpha_1 + \beta_1 = -\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\alpha_1 \cdot \beta_1 = 1,$$

а такъ какъ

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = (\alpha_1+\beta_1)^2 - 2\alpha_1\beta_1$$

$$= 2 + \sqrt{2} - 2 = \sqrt{2}$$

то сумма разсматриваемыхъ двухъ дробей будетъ:

$$\frac{1}{8} \frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2+\sqrt{2}}\,x + x^2}$$

такъ что

$$A_1 = -\frac{1}{8}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad B_1 = -\frac{1}{8}\sqrt{2}$$

Обративъ вниманіе на знаки радикаловъ второй дроби, числитель которой $A_2 x + B_2$, легко заключить что будетъ:

$$A_2 = \frac{1}{8}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad B_2 = -\frac{1}{8}\sqrt{2}$$

и совершенно также нетрудно видѣть, что

$$A_3 = -\frac{1}{8}\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad B_3 = +\frac{1}{8}\sqrt{2}$$

$$A_4 = \frac{1}{8}\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad B_4 = +\frac{1}{8}\sqrt{2}.$$

Такимъ образомъ получимъ:

$$\int \frac{x^6\,dx}{1+x^8} =$$

$$-\frac{1}{8}\int \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x+x^2}\,dx + \frac{1}{8}\int \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x+x^2}\,dx$$

$$-\frac{1}{8}\int \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x+x^2}\,dx + \frac{1}{8}\int \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x+x^2}\,dx.$$

Приведя знаменатель каждой дроби къ виду

$$(x-\beta)^2+\gamma^2$$

мы можемъ примѣнить къ нахожденію этихъ четырехъ интеграловъ формулу (3):

$$\int \frac{Mx+N}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\,dx = \frac{1}{2}M\log\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right] + \\ + \frac{N+M\beta}{\gamma}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\beta}{\gamma}$$

которая и дастъ:

$$\int \frac{x^6\,dx}{1+x^8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{16}\log\frac{1-\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x+x^2}{1+\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x+x^2} +$$

$$+\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{16}\log\frac{1-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x+x^2}{1+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x+x^2}$$

$$-\frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}+\frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$-\frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Предлагается упростить это выраженіе пользуясь формулами:

$$\operatorname{arc\,tg} a+\operatorname{arc\,tg} b=\operatorname{arc\,tg}\frac{a+b}{1-ab}$$

и

$$\operatorname{arc\,tg} a-\operatorname{arc\,tg} b=\operatorname{arc\,tg}\frac{a-b}{1+ab}.$$

§ 108. Отмѣтимъ теперь нѣкоторые частные случаи, въ которыхъ интегрированіе раціональной дроби можетъ быть выполнено проще нежели по общимъ правиламъ.

1) Найти интегралъ:

$$S=\int\frac{dx}{(x-a)^m(x-b)^n}.$$

Полагаемъ

$$\frac{x-a}{x-b}=z$$

откуда:

$$x-b=\frac{1-z}{(a-b)z}$$

и

$$x-b=\frac{a-b}{1-z};\quad dx=-\frac{(a-b)}{(1-z)^2}\,dz$$

слѣдовательно:

$$S = \frac{1}{(a-b)^{m+n-1}} \int \frac{(1-z)^{m+n-2}}{z^m} \cdot dz$$

такъ какъ m и n предполагаются цѣлыми, то разлагая $(1-z)^{m+n-2}$ по биному Ньютона сведемъ нахожденія предложеннаго интеграла къ интегрированію одночленовъ.

Примѣръ

$$S = \int \frac{dx}{(x-3)^3 \cdot (x-2)^2}$$

по предыдущимъ формуламъ, положивъ $\frac{x-3}{x-2} = z$, получимъ

$$S = \int \frac{(1-z)^3}{z^3} dz = \int \left(\frac{1}{z^3} - 3 \cdot \frac{1}{z^2} + 3 \frac{1}{z} - 1\right) dz =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2} + 3 \cdot \frac{1}{z} + 3 \log z - z =$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{x-2}{x-3} - \frac{x-3}{x-2} + 3 \log \frac{x-3}{x-2}.$$

2) Найти интегралъ

$$S = \int \frac{x^{2m+1} \cdot dx}{(a+bx^2)^n} \cdot$$

Положивъ $a + bx^2 = z$, получимъ

$$x^2 = \frac{z-a}{b}; \qquad x\,dx = \frac{1}{2b} dz$$

и слѣдовательно:

$$S = \frac{1}{2b^{m+1}} \cdot \int \frac{(z-a)^m}{z^n} \cdot dz$$

который найдется подобно предыдущему.

Напримѣръ

$$S = \int \frac{x^7}{(1+x^2)^3} \cdot dx$$

положивъ $1+x^2=z$ получимъ:

$$S=\frac{1}{2}\int\frac{(z-1)^3}{z^3}\cdot dz=\frac{1}{2}\int\left(1-3\cdot\frac{1}{z}+3\,\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}\right)dz=$$

$$=\frac{1}{2}\,z-\frac{3}{2}\log z-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\,(1+x^2)-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^2}-\frac{3}{2}\log(1+x^2).$$

3) Найти интегралъ

$$S=\int\frac{dx}{x\,(a+bx^n)^k}$$

имѣемъ:

$$S=\int\frac{dx}{x\cdot x^{nk}\left(\frac{a}{x^n}+b\right)^k}=\int\frac{\frac{dx}{x^{n+1}}}{x^{n(k-1)}\cdot\left(\frac{a}{x^n}+b\right)^k}$$

положивъ $\frac{a}{x^n}+b=z$ имѣемъ:

$$\frac{1}{x^n}=\frac{z-b}{a};\qquad\frac{dx}{x^{n+1}}=-\frac{1}{na}\cdot dz$$

и слѣдовательно:

$$S=-\frac{1}{n\cdot a^k}\cdot\int\frac{(z-b)^{k-1}}{z^k}\cdot dz$$

который и найдется подобно предыдущимъ.

4) Найти интегралъ

$$S=\int\frac{f(x)}{(x-a)^n}\cdot dx$$

гдѣ $f(x)$ есть цѣлая функція степени k отъ x.

Изъ ряда Тейлора слѣдуетъ, что цѣлая функція $f(x)$ сте-

пени k отъ x можетъ быть разложена слѣдующимъ образомъ по степенямъ $x - a$

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot \frac{x-a}{1} + f''(a) \cdot \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} +$$
$$+ f'''(a) \cdot \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + f^{(k)}(a) \cdot \frac{(x-a)^k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}$$

подставляя вмѣсто $f(x)$ это разложеніе, получимъ:

$$\int \frac{f(x) \cdot dx}{(x-a)^n} = -\frac{f(a)}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} - \frac{f'(a)}{1 \cdot (n-2)} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-2}} \ldots$$
$$\ldots - \frac{f^{(n-2)}(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)} \cdot \frac{1}{(x-a)} +$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} \cdot \log(x-a) + \frac{f^n(a)}{1 \cdot 2 \ldots n} \cdot (x-a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^k(a)}{1 \cdot 2 \ldots k} \cdot \frac{(x-a)^{k-n+1}}{k-n+1}.$$

ГЛАВА XIV.

Интегрированіе простѣйшихъ ирраціональныхъ функцій.

Изъ ирраціональныхъ функцій лишь весьма немногіе классы допускаютъ интегрированіе въ конечномъ видѣ.

Мы ограничимся лишь двумя простѣйшими изъ этихъ классовъ.

§ 109. Разсмотримъ во-первыхъ интегралы вида:

$$\int F\left(x, \sqrt[p]{\left(\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\right)^k}, \sqrt[q]{\left(\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\right)^l}, \sqrt[r]{\left(\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\right)^h} \ldots\right) dx$$

гдѣ F есть знакъ раціональной функціи тѣхъ величинъ, которыя подъ нимъ находятся, т. е. въ нашемъ случаѣ x и

$\sqrt[p]{\left(\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\right)^k}$, $\sqrt[q]{\left(\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\right)^l}$ . . . , числа p, k, q, l, r, h цѣлыя, числа-же a, b, α и β какія угодно.

Интегралъ такого вида приводится къ интегралу функціи раціональной, стоитъ только положить:

$$\frac{ax+b}{\alpha x+\beta} = z^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ n есть наименьшее кратное чиселъ p, q, r . . . показателей корня.

Чтобы выполнить подстановку (1) находимъ какимъ образомъ выражается черезъ z каждый изъ стоящихъ подъ знакомъ интеграла корней,

Имѣемъ:

$$\sqrt[p]{\left(\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\right)^k} = (z^n)^{\frac{k}{p}} = z^{\frac{nk}{p}} = z^{\mu}$$

$$\sqrt[q]{\left(\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\right)^l} = (z^n)^{\frac{l}{q}} = z^{\frac{nl}{q}} = z^{\nu}$$

$$\sqrt[r]{\left(\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\right)^h} = (z^n)^{\frac{h}{q}} = z^{\frac{nh}{h}} = z^{\lambda}$$

. . . . . .

и такъ какъ n, будучи наименьшимъ кратнымъ цѣлыхъ чиселъ p, q, r . . . дѣлится на каждое изъ нихъ на цѣло, то числа μ, ν, λ, . . . цѣлыя.

Далѣе изъ формулы (1) имѣемъ:

$$x = \frac{b-\beta z^n}{\alpha z^n - a}$$

и затѣмъ

$$dx = \frac{n(a\beta - b\alpha)\, z^{n-1}}{(\alpha z^n - a)^2} \cdot dz$$

т. е. x и dx выражаются раціонально черезъ z и слѣдовательно послѣ подстановки предложенный интегралъ обратится въ интегралъ отъ *раціональной* функціи отъ z, и значитъ найдется въ конечномъ видѣ, и останется только въ найденномъ интегралѣ вмѣсто z подставить его величину:

$$z = \left(\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\right)^{\frac{1}{n}}$$

послѣ чего и предложенный интегралъ представится въ конечномъ видѣ какъ функція отъ x.

Примѣръ 1-й: Найти интегралъ.

$$S = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot dx$$

Согласно вышеизложенному дѣлаемъ:

$$\frac{1+x}{1-x} = z^2$$

откуда

$$x = \frac{z^2-1}{z^2+1} = 1 - \frac{2}{z^2+1}$$

$$dx = \frac{4z\,dz}{(z^2+1)^2}$$

$$S = \int \frac{4\cdot z^2 \cdot dz}{(z^2+1)^2} = 2\int z \cdot d\left(\frac{-1}{z^2+1}\right) =$$

$$= 2\left[\frac{-z}{z^2+1} + \int \frac{dz}{z^2+1}\right] = -\frac{2z}{z^2+1} + \operatorname{arctg} z + C.$$

Подставляя вмѣсто z его величину имѣемъ:

$$S = 2\left[\frac{-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{\frac{1+x}{1-x}+1} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right] + C =$$

$$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Можно предыдущій интегралъ найти и иначе, а именно:

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \text{arc Sin } x - \sqrt{1-x^2} + C_1.$$

Примѣчаніе. Показать что разность

$$\text{arc Sin } x - 2 \text{ arctg } \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \text{постоянной.}$$

Примѣръ 2-й. Найти интегралъ:

$$S = \int \frac{\sqrt{1+x} + 3\sqrt[6]{1+x}}{\sqrt[3]{(1+x)^2}\left(1+\sqrt[3]{1+x}\right)^2} \cdot dx.$$

Очевидно, что этотъ интегралъ принадлежитъ къ разсматриваемому классу ($a=1,\ b=1,\ \alpha=0,\ \beta=1$), поэтому полагаемъ

$$1+x = z^6$$

тогда:

$$\sqrt{1+x} = z^3;\ \sqrt[3]{(1+x)^2} = z^4;\ \sqrt[3]{1+x} = z^2$$

$$x = z^6 - 1;\ dx = 6z^5 \cdot dz$$

$$S = \int \frac{z^3+3z}{z^4\cdot(1+z^2)^2} \cdot 6z^5\,dz = 6\int \frac{z^4+3z^2}{(z^2+1)^2} \cdot dz = \frac{6z^3}{z^2+1}$$

$$= \frac{6\sqrt{1+x}}{1+\sqrt[3]{1+x}}.$$

Примѣчаніе. Чтобы проще найти интегралъ $\int \frac{z^4+3z^2}{(z^2+1)^2} \cdot dz$ можно поступить слѣдующимъ образомъ: очевидно что

$$(z^2+1)^2 = z^4 + 2z^2 + 1,$$

слѣдовательно

$$z^4 + 3z^2 = (z^2 + 1)^2 + z^2 - 1,$$

значитъ будетъ:

$$\int \frac{z^4 + 3z^2}{(z^2+1)^2} \cdot dz = \int \frac{(z^2+1)^2 + z^2 - 1}{(z^2+1)^2} \cdot dz = z + \int \frac{(z^2+1)^2}{z^2 - 1}\, dz$$

Затѣмъ замѣтивъ, что $z^2 - 1 = 2z^2 - (z^2 + 1)$ имѣемъ:

$$\int \frac{z^2 - 1}{(z^2+1)^2} \cdot dz = 2\int \frac{z^2}{(z^2+1)^2} \cdot dz - \int \frac{z^2+1}{(z^2+1)^2} \cdot dz =$$

$$= \int z \cdot \frac{2z\, dz}{(z^2+1)^2} - \int \frac{dz}{z^2+1}.$$

Примѣняя интегрированіе по частямъ имѣемъ:

$$\int z \frac{2z\, dz}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{1+z^2} \cdot z + \int \frac{dz}{1+z^2}$$

подставляя въ предыдущую формулу получаемъ

$$\int \frac{z^2 - 1}{(z^2+1)^2} \cdot dz = -\frac{z}{1+z^2}.$$

Слѣдовательно:

$$\int \frac{(z^2+1)^2}{z^4 + 3z^2} \cdot dz = z - \frac{z}{1+z^2} = \frac{z^3}{z^2+1}.$$

§ 110. Второй классъ ирраціональностей, интегралы отъ коихъ всегда находятся въ конечномъ видѣ, составляютъ функціи содержащія одинъ корень второй степени отъ трехчлена второй же степени относительно x, т. е. интегралы вида:

$$S = \int F(x, \sqrt{Ax^2 + Bx + C}) \cdot dx$$

гдѣ F есть раціональная функція отъ x и корня, величины-же A, B и C какія угодно постоянныя.

Покажемъ во первыхъ, что при помощи нѣкоторыхъ подстановокъ этотъ интегралъ можетъ быть всегда приведенъ къ интегралу отъ раціональной дроби, и слѣдовательно выраженъ въ конечномъ видѣ.

Упомянутыя подстановки слѣдующія:

1-ая: Полагаемъ:

$$\sqrt{Ax^2+Bx+C} = \sqrt{A}\cdot x + z \quad \ldots\ldots \text{I.}$$

Отсюда имѣемъ:

$$Ax^2+Bx+C = Ax^2+2xz\sqrt{A}+z^2$$

и слѣдовательно:

$$x = \frac{z^2-C}{B-2\sqrt{A}\cdot z}.$$

Значитъ x выражается *раціонально* черезъ z, и слѣдовательно dx будетъ равенъ раціональной функціи отъ z умноженной на dz, затѣмъ по уравненію I

$$\sqrt{Ax^2+Bx+C} = \sqrt{A}\cdot\frac{z^2-C}{B-2\sqrt{A}\cdot z}+z$$

есть тоже раціональная функція отъ z.

Значитъ подставляя вмѣсто x, dx, и корня $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ ихъ величины подъ интегралъ, мы видимъ, что подъинтегральная функція будетъ раціональной относительно новой перемѣнной z. Найдя этотъ интегралъ по правиламъ главы XIII, подставляемъ вмѣсто z его величину

$$z = \sqrt{Ax^2+Bx+C} - x\sqrt{A}.$$

тогда искомый интегралъ S и выразится въ конечномъ видѣ.

Если A, B и C вещественные, то чтобы не вводить мнимыхъ знаковъ слѣдуетъ пользоваться этой подстановкой, когда A положительное ($A > 0$).

2-я подстановка, которая также приводитъ предложенный интегралъ, къ интегралу отъ раціональной функціи—такая:

$$\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = \sqrt{C} + xz \quad \ldots\ldots\ldots \text{II.}$$

Отсюда имѣемъ:

$$Ax^2 + Bx + C = C + 2xz\sqrt{C} + x^2z^2$$

$$Ax + B = 2\sqrt{C}z + xz^2$$

$$x = \frac{B - 2\sqrt{C}.z}{z^2 - A}.$$

слѣдовательно и dx будетъ выражаться раціонально черезъ z.

Затѣмъ уравненіе II даетъ

$$\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = \sqrt{C} + \frac{B - 2\sqrt{C}.z}{z^2 - A} \cdot z$$

т. е. тоже раціональную функцію отъ z.

Подставивъ подъ интегралъ вмѣсто x, dx, и $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ ихъ величины, мы обратимъ его въ интегралъ раціональной дроби и найдемъ какъ и въ первомъ случаѣ.

При вещественныхъ A, B и C, эта подстановка не вводитъ мнимыхъ знаковъ, когда C положительное и ею слѣдуетъ пользоваться въ этомъ случаѣ ($C > 0$).

3-я подстановка состоитъ въ слѣдующемъ:

Пусть корни уравненія

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

суть

$$x = \alpha \text{ и } x = \beta$$

Мы предполагаемъ ихъ неравными между собою, ибо если бы α равнялась β, то трехчленъ представлялъ бы полный квадратъ, корень бы извлекался, и предложенный интегралъ безъ всякихъ преобразованій былъ бы интеграломъ раціональной функціи.

Очевидно, что при всякомъ x будетъ:

$$Ax^2 + Bx + C = A(x - \alpha)(x - \beta).$$

Подстановка состоитъ въ томъ, что полагаютъ

$$\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = (x - \alpha) \cdot z \quad \ldots\ldots \text{III.}$$

Отсюда имѣемъ:

$$A(x - \alpha)(x - \beta = (x - \alpha)^2 \cdot z^2$$

$$A(x - \beta) = (x - \alpha) \cdot z^2$$

$$x = \frac{\alpha z^2 - A\beta}{z^2 - A}$$

значитъ и dx выразится раціонально черезъ z, а затѣмъ по уравненію (III) имѣемъ:

$$\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = \left(\frac{\alpha z^2 - A\beta}{z^2 - A} - \alpha\right) \cdot z$$

т. е. раціональную функцію отъ z, поэтому подставивъ вмѣсто x, dx, и $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ ихъ величины, выраженныя черезъ z, мы обратимъ предложенный интегралъ въ интегралъ раціональной дроби и найдемъ его въ конечномъ видѣ, какъ сказано выше.

Этотъ пріемъ не вводитъ мнимыхъ знаковъ, когда корни предложеннаго трехчлена вещественные, коэффиціенты-же A, C

и B могутъ быть какіе угодно положительные или отрицательные, поэтому этотъ пріемъ примѣнимъ (не вводя мнимыхъ знаковъ), когда $A<0$ и $C<0$, но α и β вещественные.

Остается тотъ случай, когда

$$A<0, \quad C<0$$

и корни трехчлена мнимые. Въ этомъ случаѣ, какъ нетрудно видѣть, избѣжать мнимости невозможно, ибо подкоренная величина при всякомъ вещественномъ x отрицательная; дѣйствительно:

$$Ax^2+Bx+C=A\left[x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right]=$$

$$=A\left[\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\frac{4AC-B^2}{4A^2}\right].$$

По предположенію корни трехчлена мнимые, а тогда величина $4AC-B^2>0$ слѣдовательно величина въ [ ] всегда положительная коэффиціентъ-же A по предположенію отрицательный, слѣдовательно вся подкоренная величина представляющая произведеніе положительной величины на отрицательную — отрицательная, и слѣдовательно входящій подъ знакъ интеграла корень есть величина мнимая, поэтому въ этомъ случаѣ мнимые знаки неизбѣжны.

Примѣры: Найти интегралъ:

$$S=\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\cdot dx.$$

здѣсъ примѣнима какъ первая, такъ и вторая подстановка. Возьмемъ сперва первую — полагаемъ

$$\sqrt{x^2+x+1}=x+z$$

слѣдовательно

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2xz + z^2$$

$$x = \frac{z^2 - 1}{1 - 2z}$$

$$dx = \frac{2z \cdot (1 - 2z) + 2(z^2 - 1)}{(1 - 2z)^2} dz = -2 \frac{z^2 - z + 1}{(1 - 2z)^2} \cdot dz$$

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{z^2 - 1}{1 - 2z} + z = -\frac{z^2 - z + 1}{1 - 2z}$$

значитъ

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \frac{2\,dz}{1 - 2z}; \quad x + 1 = \frac{z^2 - 2z}{1 - 2z}$$

и

$$S = 2\int \frac{z^2 - 2z}{(1 - 2z)^2} \cdot dz = -\frac{z^2 - z + 1}{1 - 2z} - \frac{1}{2} \log(1 - 2z) + C$$

подставивъ вмѣсто z его величину

$$z = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

получимъ:

$$S = \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2} \log(1 + 2x - 2\sqrt{x^2 + x + 1}) + C$$

$$= \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} \log\left[\left(x + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{x^2 + x + 1}\right] + C_1.$$

Найдемъ теперь тотъ-же интегралъ, сдѣлавъ вторую подставку, т. е. полагая

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = 1 + xz$$

откуда:

$$x^2 + x + 1 = 1 + 2xz + z^2 x^2$$

$$x = \frac{1 - 2z}{z^2 - 1}$$

$$dx = \frac{-2(z^2-1)-2z(1-2z)}{(z^2-1)^2}\,dz = 2\,\frac{z^2-z+1}{(z^2-1)^2}\cdot dz$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = 1+z\cdot\frac{1-2z}{z^2-1} = -\frac{z^2-z+1}{z^2-1}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = -\frac{2dz}{z^2-1};\quad x+1 = \frac{z^2-2z}{z^2-1}$$

$$S = -2\int\frac{z^2-2z}{(z^2-1)}\cdot dz = \frac{z-2}{z^2-1}+\frac{1}{2}\log\frac{z+1}{z-1}+C$$

подставививъ вмѣсто z его величину

$$z = \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$$

послѣ простыхъ алгебраическихъ преобразованій получимъ тотъ-же результатъ какъ и раньше.

Примѣръ 2-й. Найти интегралъ:

$$S = \int\frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$$

здѣсь, чтобы не вводить мнимыхъ знаковъ, надо примѣнить третью подстановку: именно замѣтивъ, что стоящій подъ знакомъ корня трехчленъ

$$3x-x^2-2 = (1-x)(x-2)$$

положимъ:

$$\sqrt{3x-x^2-2} = \sqrt{(1-x)\ (x-2)} = (1-x)\cdot z$$

тогда будетъ:

$$(1-x)(x-2) = (1-x)^2\cdot z^2 \text{ или } x-2 = (1-x)\cdot z^2.$$

Значитъ $x = \frac{z^2+2}{1+z^2}$

$$dx = \frac{2z(1+z^2) - 2z(z^2+2)}{(1+z^2)^2} \cdot dz = -\frac{2z \cdot dz}{(1+z^2)^2}$$

$$\sqrt{(1-x)(x-2)} = \frac{-z}{1+z^2} \quad ; \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(x-2)}} = \frac{2\,dz}{1+z^2}$$

слѣдовательно:

$$S = 2\int \frac{dz}{1+z^2} = 2 \operatorname{arctg} z = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-2}{1-x}} + C.$$

§ 111. Пользуясь указанными въ предыдущемъ § подстановками можно всякій интегралъ содержащій одинъ корень изъ трехчлена второй степени относительно x привести къ интегралу раціональной дроби и слѣдовательно выразить въ конечномъ видѣ. Но примѣненіе этого общаго пріема часто требуетъ длинныхъ выкладокъ и интегралъ проще находить не пользуясь этими подстановками, а примѣняя другіе пріемы, полное и подробно изложеніе которыхъ не входитъ въ нашъ курсъ, но о которыхъ мы дадимъ понятіе примѣняя ихъ къ интеграламъ вида:

$$S = \int \frac{ax+b}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}\,dx.$$

Очевидно, что предложенный интегралъ можетъ быть написанъ такъ:

$$S = \frac{a}{A}\int \frac{(2Ax+B)\,dx}{2\sqrt{Ax^2+Bx+C}} + \left(b - \frac{aB}{2A}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$$

такъ какъ

$$(2Ax+B)\,dx = d(Ax^2+Bx+C)$$

то

$$\int \frac{(2Ax+B)\,dx}{2\sqrt{Ax^2+Bx+C}} = \sqrt{Ax^2+Bx+C}$$

слѣдовательно

$$S = \frac{a}{A}\sqrt{Ax^2+Bx+C} + \left(b - \frac{a}{2}\frac{B}{A}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}.$$

Такимъ образомъ нахожденіе предложеннаго интеграла приведено къ нахожденію интеграла:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}.$$

Чтобы найти этотъ интегралъ не пользуясь указанными въ § 110 подстановками, мы замѣтимъ слѣдующія формулы:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \text{arc Sin}\,\frac{x}{a} + C$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm p}} = \log\left(x + \sqrt{x^2 \pm p}\right) + C.$$

вторая изъ этихъ формулъ выведена въ § 100.

Къ одному изъ этихъ двухъ интеграловъ и приводится предложенный если только представить трехчленъ стоящій подъ знакомъ корня въ видѣ суммы или разности двухъ квадратовъ, что мы и покажемъ на численныхъ примѣрахъ предлагая вывести общія формулы въ видѣ задачи.

Примѣръ 1-й. Найти интегралъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3x+2}}.$$

Очевидно имѣемъ:

$$5x^2+3x+2=\frac{1}{5}\left[\left(5x+\frac{3}{2}\right)^2+10-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]$$

и

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+3x+2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\int\frac{d\left(5x+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(5x+\frac{3}{2}\right)^2+10-\left(\frac{3}{2}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left[\left(5x+\frac{3}{2}\right)+\sqrt{\left(5x+\frac{3}{2}\right)^2+10-\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right]+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left[\left(5x+\frac{3}{2\sqrt{5}}+\sqrt{5x^2+3x+2}\right]+C_1\right.$$

причемъ $C_1=C+\frac{1}{\sqrt{5}}\log\sqrt{5}$ и есть такая же произвольная постоянная, какъ и C. Подобное преобразованіе примѣнимо всякій разъ, когда коэффиціентъ A положительный.

Примѣръ 2-й. Найти интегралъ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-5x^2}}$$

Очевидно имѣемъ:

$$2+3x-5x^2=\frac{1}{5}\left[10-(25x^2-15x)\right]=$$

$$=\frac{1}{5}\left[10+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(5x-\frac{3}{2}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{5}\left[\frac{49}{4}-\left(5x-\frac{3}{2}\right)^2\right].$$

Слѣдовательно

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-5x^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{d\left(5x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{49}}{2}\right)^2-\left(5x-\frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\ Sin}\left(\frac{10x-3}{7}\right)+C.$$

Этотъ пріемъ примѣнимъ всякій разъ когда коэффиціентъ A отрицательный и трехчленъ стоящій подъ знакомъ корня представляется въ видѣ разности двухъ квадратовъ.

Примѣръ 3-й. Найти интегралъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-2+3x-5x^2}}$$

очевидно что:

$$-2+3x-5x^2 = \tfrac{1}{5}\left[-10-(25x^2-15x)\right] =$$

$$= \tfrac{1}{5}\left[-10+\left(\tfrac{3}{2}\right)^2-\left(5x-\tfrac{3}{2}\right)^2\right] =$$

$$= -\tfrac{1}{5}\left[\tfrac{37}{4}+\left(5x-\tfrac{3}{2}\right)^2\right].$$

Значитъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-2+3x-5x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot\sqrt{5}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{37}{4}+\left(5x-\frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left[5x-\tfrac{3}{2}+\sqrt{25x^2-15x+10}\right]+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left[\sqrt{5}x-\frac{3}{2\sqrt{5}}+\sqrt{5x^2-3x+2}\right]+C_1.$$

Нетрудно видѣть, что интегралъ разсматриваемаго вида будетъ имѣть множителемъ $\sqrt{-1}$ всякій разъ, когда стоящій подъ знакомъ корня трехчленъ таковъ, что численная его величина при всякомъ вещественномъ значеніи x отрицательная, т. е. когда:

$$A<0,\ C<0 \text{ и } B^2-4\ AC<0.$$

ГЛАВА XV.

Интегрированіе трансцендентныхъ функцій.

§ 112. Въ предыдущей главѣ даны простѣйшіе случаи интегрированія въ конечномъ видѣ алгебраическихъ функцій, здѣсь мы приведемъ простѣйшіе изъ тѣхъ случаевъ, когда интегрированіе трансцендентныхъ функцій приводится или къ интегрированію функцій алгебраическихъ или же выполняется непосредственно въ конечномъ видѣ.

Мы приведемъ сперва слѣдующія общія теоремы:

1. **Теорема I.** *Интегралъ.*

$$S = \int F[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) \cdot dx$$

гдѣ F есть знакъ алгебраической функціи, а $\varphi(x)$ трансцендентная функція, приводится къ интегралу отъ алгебраической функціи, именно къ интегралу:

$$S = \int F(z) \cdot dz$$

если сдѣлать $\varphi(x) = z.$

Дѣйствительно если

$$\varphi(x) = z$$

то

$$\varphi'(x) \cdot dx = dz$$

и слѣдовательно:

$$S = \int [\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) \cdot dx = \int F(z) \cdot dz.$$

Къ интеграламъ этого класса принадлежатъ напримѣръ слѣдующіе:

$$\int F(\log x) \cdot \frac{dx}{x}\ ;\ \int F(\text{arc Sin } x)\, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\ \int F(\text{arctg } x) \cdot \frac{dx}{1+x^2}$$

и т. п.

2) **Теорема II.** *Интегралъ.*

$$S = \int F(e^x) \cdot dx$$

приводится къ такому

$$S = \int F(z) \cdot \frac{dz}{z}$$

если сдѣлать

$$e^x = z.$$

Дѣйствительно въ этомъ случаѣ будетъ:

$$e^x \cdot dx = dz$$

слѣдовательно

$$dx = \frac{dz}{e^x} = \frac{dz}{z}$$

и по подстановкѣ:

$$\int F(e^x) \cdot dx = \int F(z) \cdot \frac{dz}{z}\ .$$

3) **Теорема III.** *Интегралъ*

$$S = \int F(\text{Sin } x, \cos x) \cdot dx$$

гдѣ F есть знакъ алгебраической функціи приводится къ интегралу отъ алгебраической функціи если сдѣлать:

$$\text{tg } \frac{x}{2} = z.$$

Дѣйствительно тогда будетъ:

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} z$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} z$$

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2} \quad \ldots \quad (**)$$

$$\operatorname{Sin} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin} x &= 2 \operatorname{Sin} \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{2z}{1+z^2} \\ \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{Sin}^2 \frac{x}{2} = \frac{1-z^2}{1+z^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (*).$$

Подставляя въ S получимъ:

$$S = 2 \int F\left[\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right] \cdot \frac{dz}{1+z^2}$$

интегралъ въ которомъ болѣе не содержится трансцендентныхъ функцій $\operatorname{Sin} x$, $\cos x$.

Замѣтимъ, что во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда въ теоремахъ 1, 2, 3, F есть знакъ раціональной функціи, то интегралы въ этихъ теоремахъ обозначенные приводятся къ интегралмъ раціональныхъ дробей и слѣдовательно находятся въ конечномъ видѣ.

Примѣры.

1) $$\int \frac{\cos x \cdot dx}{\sqrt{\operatorname{Sin}^2 x + 4}}.$$

По 1-й теоремѣ полагаемъ:

$$\operatorname{Sin} x = z$$

тогда

$$\cos x\, dx = dz$$

$$S = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+4}} = \log\left(z + \sqrt{z^2+4}\right) + C =$$

$$= \log\left(\operatorname{Sin} x + \sqrt{\operatorname{Sin}^2 x + 4}\right) + C.$$

2) $$S = \int \frac{dx}{x\,[1 + (\log x)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

по 1-й теоремѣ полагаемъ:

$$\log x = z$$

тогда

$$\frac{dx}{x} = dz$$

$$S = \int \frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} + C = \frac{\log x}{\sqrt{1+(\log x)^2}} + C.$$

3) $$S = \int \frac{\operatorname{tg} x \cdot dx}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}} = \int \frac{\operatorname{Sin} x \cdot dx}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2 x - \operatorname{Sin}^2 x}} =$$

$$= -\int \frac{-\operatorname{Sin} x \cdot dx}{\sqrt{2\operatorname{Cos}^2 x - 1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{-\operatorname{Sin} x\, dx}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2 x - \frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2}} \log\left(\operatorname{Cos} x + \sqrt{\operatorname{Cos}^2 x - \frac{1}{2}}\right) + C.$$

4) $$S = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

Дѣлаемъ $e^x = z$ тогда $dx = \frac{dz}{z}$ и

$$S = \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \operatorname{arctg} z = \operatorname{arctg} e^x + C.$$

5) $$S = \int \frac{dx}{a + b\cos x}.$$

Дѣлаемъ

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$$

тогда:

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$$

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$S = 2\int \frac{dz}{(1+z^2)\left(a+b\,\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = 2\int \frac{dz}{a(1+z^2)+b(1-z^2)} =$$

$$= 2\int \frac{dz}{(a-b)z^2+(a+b)}.$$

Надо теперь различать два случая:
1) $a-b$ и $a+b$ имѣютъ одинъ знакъ
2) $a-b$ и $a+b$ имѣютъ знаки разные.
Въ 1-мъ случаѣ будетъ:

$$S = \frac{2}{a-b}\int \frac{dz}{z^2+\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{a-b}\cdot\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{arctg}\left(z\cdot\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(z\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)+C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]+C.$$

Во второмъ случаѣ:

$$S = \frac{2}{a-b}\int \frac{dz}{z^2-\frac{b+a}{b-a}} = -\frac{2}{b-a}\int \frac{dz}{z^2-\left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\right)^2} =$$

$$= -\frac{2}{b-a}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\log\frac{z-\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}}{z+\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\lg\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}}.$$

Такъ какъ $a+b$ и $a-b$ знаковъ различныхъ то $b+a$ и $b-a$ будутъ одного знака и слѣдовательно въ послѣдней формулѣ корни вещественные.

Къ только что разсмотрѣнному интегралу приводится и болѣе общій

$$S_n = \int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n}$$

гдѣ n любое положительное цѣлое число при помощи слѣдующей формулы приведенія:

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n} = -\frac{b\,\mathrm{Sin}\,x}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\cos x)^{n-1}} + \\ + \frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)} \int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}} + \\ + \frac{2n-3}{(n-1)(a^2-b^2)} \int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$

которую предлагается вывести или повѣрить дифференцированіемъ въ видѣ задачи.

При $n=2$ въ правой части средній членъ пропадаетъ и остается только интегралъ съ показателемъ $n-1=1$ уже найденный.

При $n=3$ интегралъ сводится на два другихъ съ показателями $n-1=2$ и $n-2=1$ и т. д.

Примѣры найти:

1) $$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2}$$

2) $$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^3}.$$

4) **Теорема IV.** *Интегралъ*

$$\int \varphi^n \cdot f \cdot dx$$

гдѣ φ *есть трансцендентная функція отъ* x *имѣющая алгебраическую производную,* f *— алгебраическая функція и* n *цѣлое и положительное число, приводится интегрированіемъ по частямъ къ другому подобному, у котораго* φ *будетъ возвышено въ степень* $n-1$*, если взявъ въ формулѣ*

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$u = \varphi^n$ и $dv = f \cdot dx$, *окажется что* $v = \int f \cdot dx$ *есть алгебраическая функція отъ* x.

Можетъ случиться, что съ новымъ интеграломъ можно поступать опять также и привести къ интегралу съ показателемъ $n-2$ и т. д.

Дадимъ нѣсколько примѣровъ, когда этотъ показатель можно довести до нуля и значитъ предложенный интегралъ свести къ интегралу алгебраической функціи.

Примѣръ 1-й. Пусть:

$$S_n = \int (\log x)^n \cdot x^\mu \cdot dx$$

гдѣ μ какая угодно постоянная, n цѣлое и положительное число.

По теоремѣ IV дѣлаемъ въ формулѣ:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$(\log x)^n = u$; $dv = x^\mu \cdot dx$ слѣдовательно $v = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$
и значитъ:

$$S_n = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \cdot (\log x)^n - \frac{n}{\mu+1} \cdot \int (\log x)^{n-1} \cdot x^\mu \cdot dx$$

иначе:

$$S_n = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \cdot (\log x)^n - \frac{n}{\mu+1} S_{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

подставляя въ эту формулу вмѣсто n послѣдовательно величины:

$$(n-1),\ (n-2),\ \ldots\ 2,\ 1$$

получимъ слѣдующій рядъ уравненій:

$$S_{n-1} = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \cdot (\log x)^{n-1} - \frac{n-1}{\mu+1} \cdot S_{n-2}$$

$$S_{n-2} = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \cdot (\log x)^{n-2} - \frac{n-2}{\mu+1} \cdot S_{n-3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_2 = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \cdot (\log x)^2 - \frac{2}{\mu+1} \cdot S_1$$

$$S_1 = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \cdot \log x \quad - \frac{1}{\mu+1} \cdot S_0$$

$$S_0 = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

Умноживъ первое уравненіе на $-\frac{n}{\mu+1}$, второе на $\frac{n(n-1)}{(\mu+1)^2}$ третье на $-\frac{n(n-1)(n-2)}{(\mu+1)^3}$ . . . . и т. д., послѣднее на

$$(-1)^{n+2} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{\mu+1}$$

и сложивъ ихъ съ уравненіемъ (*) получимъ:

$$S_n = \int (\log x)^n \cdot x^\mu \cdot dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \left\{ (\log x)^n - \frac{n}{\mu+1} \cdot (\log x)^{n-1} + \right.$$

$$+ \frac{n(n-1)}{(\mu+1)^2} \cdot (\log x)^{n-2} + \cdots +$$

$$+ (-1)^n \frac{n(n-1)\ldots\ldots 4 \cdot 3}{(\mu+1)^{n-2}} \cdot \log x^2 - (-1)^n \cdot \frac{n(n-1)\ldots 4 \cdot 3 \cdot 2}{(\mu+1)^{n-1}} \log x$$

$$\left. + (-1)^n \cdot \frac{n(n-1)\ldots\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(\mu+1)^n} \right\} + C.$$

Примѣръ 2-й. Пусть

$$S_n = \int (\text{arc Sin } x)^n \cdot dx.$$

Дѣлая въ формулѣ интегрированія по частямъ

$$u = (\text{arc Sin } x)^n; \qquad dv = dx; \qquad v = x$$

имѣемъ:

$$S_n = x(\text{arc Sin } x)^n - n\int (\text{arc Sin } x)^{n-1} \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad . \quad . \quad (*).$$

Интегралъ второй части трактуемъ снова также, дѣлая:

$$u = (\text{arc Sin } x)^{n-1}; \quad dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

тогда

$$du = (n-1)(\text{arc Sin } x)^{n-2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad v = -\sqrt{1-x^2}$$

и будетъ:

$$\int (\text{arc Sin } x)^{n-1} \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -(\text{arc Sin } x)^{n-1} \cdot \sqrt{1-x^2} +$$

$$+ (n-1)\int (\text{arc Sin } x)^{n-2} \cdot dx \quad . \quad . \quad . \quad (**)$$

обозначивъ послѣдній интегралъ въ правой части этой формулы черезъ S_{n-2} и подставляя въ (*) имѣемъ:

$$S_n = x(\text{arc Sin } x)^n + n(\text{arc Sin } x)^{n-1} \cdot \sqrt{1-x^2} -$$

$$- n(n-1) \cdot S_{n-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (***).$$

Эта формула дозволяетъ отъ интеграла съ показателемъ n перейти къ интегралу съ показателемъ $n-2$, поэтому когда n число четное то примѣняя формулу (***) нѣсколько разъ доведемъ показатель до 0, величина же $S_0 = x$. Если n нечетное то мы дойдемъ до интеграла S_1 который будетъ:

$$S_1 = x \operatorname{arc\,Sin} x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x \operatorname{arc\,Sin} x + \sqrt{1-x^2}.$$

Въ обоихъ случаяхъ предложенный интегралъ найдется въ конечномъ видѣ, причемъ поступая подобно тому какъ въ примѣрѣ 1-мъ и разсматривая отдѣльно случай n четнаго и n нечетнаго можно получить и общія формулы, выражающія эти интегралы, что и предлагается выполнить въ видѣ задачи.

Примѣры 3-й и 4-й. Совершенно подобно предыдущимъ найти интегралы:

$$S_n = \int (\operatorname{arc\,cos} x)^n \cdot dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$S_n = \int [\log (x + \sqrt{1+x^2})]^n \cdot dx \; . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

§ 113. Разсмотримъ теперь интегралы слѣдующихъ видовъ:

$$\int e^{\mu x} \cdot f(x) \cdot dx;$$

$$\int \operatorname{Sin} ax \cdot f(x) \cdot dx; \quad \int f(x) \cos bx \, dx$$

гдѣ $f(x)$ есть цѣлая функція отъ x.

1) Пусть

$$S = \int e^{\mu x} \cdot f(x) \cdot dx$$

примѣнимъ формулу интегрированія по частямъ сдѣлавъ въ ней:

$$u = f(x) \qquad dv = e^{\mu x} \cdot dx \qquad v = \frac{1}{\mu} \cdot e^{\mu x}$$

тогда будетъ:

$$S = \int e^{\mu x} \cdot f(x) \cdot dx = f(x) \cdot e^{\mu x} - \frac{1}{\mu} \cdot \int e^{\mu x} \cdot f'(x) \cdot dx \ . \ (*)$$

эта формула показываетъ, что предложенный интегралъ приводится къ другому подобному-же, но въ которомъ степень функціи на 1 меньше нежели въ первоначальномъ. Поступивъ съ этимъ интеграломъ также, понизимъ степень функціи еще на 1 и наконецъ дойдемъ до интеграла

$$\int e^{\mu x} \cdot f^{(n)}(x) \cdot dx$$

который въ томъ случаѣ, когда степень функціи $f(x)$ есть n и коэффиціентъ при x^n есть a будетъ равенъ

$$\int e^{\mu x} \cdot f^{(n)}(x) \cdot dx = 1 \ . \ 2 \ . \ . \ . \ . \ n \ . \ a \ . \int e^{\mu x} \cdot dx =$$

$$= 1 \ . \ 2 \ . \ 3 \ . \ . \ . \ . \ n \ . \ a \ . \ \frac{e^{\mu x}}{\mu} + C$$

и мы получимъ такую общую формулу:

$$\int e^{\mu x} \cdot f(x) \cdot dx = \frac{e^{\mu x}}{\mu} \left[f(x) - \frac{1}{\mu} \cdot f'(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\mu^2} \cdot f''(x) \ . \ . \ . \ . \pm \frac{1 \ . \ 2 \ . \ . \ . \ . \ n \ . \ a}{\mu^n} \right] + C \ . \quad (**).$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ теорему:

Теорема V. *Интегралъ:*

$$\int e^{\mu x} \cdot f(x) \cdot dx$$

гдѣ $f(x)$ есть цѣлая функція степени n всегда выражается въ конечномъ видѣ функціей того-же вида какъ и подъинтегральная, т. е. произведеніемъ изъ показательной $e^{\mu x}$ на цѣлую функцію степени n.

На основаніи этой теоремы можно находить интегралы вида $\int e^{\mu x} \cdot f(x)\, dx$ по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Пусть:

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + kx + l$$

огда въ силу высказанной теоремы можемъ написать равенство:

$$\int e^{\mu x} f(x) \cdot dx = e^{\mu x}[Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Kx + L]. \quad (1)$$

гдѣ $A, B, \ldots K$ и L неопредѣленные коэффиціенты, которые надо опредѣлить, такъ чтобы это равенство имѣло мѣсто тожественно, для этого дифференцируемъ его и получаемъ:

$$e^{\mu x} \cdot f(x) = e^{\mu x}(ax^n + bx^{n-1} + \ldots + kx + l) =$$
$$= \mu e^{\mu x}[Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Kx + L] +$$
$$+ e^{\mu x}[nAx^{n-1} + (n-1)\,Bx^{n-2} + \ldots + K] \quad (*)$$

сокративъ на $e^{\mu x}$ и уравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x въ обѣихъ частяхъ формулы (*), получимъ для опредѣленія неизвѣстныхъ $A, B, \ldots K$ и L слѣдующую систему уравненій:

$$\mu A = a$$
$$\mu B + nA = b$$

$$\mu C + (n-1)B = c$$

. . . . . .

$$\mu L + K = l$$

подставивъ найденныя изъ этой системы величины $A, B, \ldots K$ и L въ формулу (1) и получимъ требуемый интегралъ.

§ 114. Совершенно подобнымъ-же образомъ найдутся и интегралы вида:

$$\int f(x) \operatorname{Cos} \mu x \cdot dx \quad \text{и} \quad \int f(x) \operatorname{Sin} \mu x \cdot dx$$

причемъ $f(x)$ есть цѣлая функція отъ x.

Такъ напримѣръ:

$$S = \int (x^2 + x + 1) \operatorname{Cos} 3x \, dx$$

примѣняемъ интегрированіе по частямъ полагая въ формулѣ:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$u = x^2 + x + 1 \quad \text{и} \quad dv = \operatorname{Cos} 3x \cdot dx$$

такъ что:

$$v = \tfrac{1}{3} \operatorname{Sin} 3x.$$

$$S = \tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1) \operatorname{Sin} 3x - \tfrac{1}{3} \int (2x+1) \operatorname{Sin} 3x \, dx.$$

Затѣмъ принимая

$$u = 2x + 1; \quad dv = \operatorname{Sin} 3x \, dx; \quad v = -\tfrac{1}{3} \operatorname{Cos} 3x$$

имѣемъ:

$$\int (2x+1) \operatorname{Sin} 3x \cdot dx =$$

$$= -\tfrac{1}{3}(2x+1) \operatorname{Cos} 3x + \tfrac{2}{3} \int \operatorname{Cos} 3x \, dx$$

такъ что:

$$\int (2x+1)\,\mathrm{Sin}\,3x\,dx = -\tfrac{1}{3}(2x+1)\,\mathrm{Cos}\,3x + \tfrac{2}{9}\,\mathrm{Sin}\,3x$$

и подставляя въ предыдущую формулу получимъ:

$$S = \tfrac{1}{3}(x^2+x+1)\,\mathrm{Sin}\,3x + \tfrac{1}{9}(2x+1)\,\mathrm{Cos}\,3x - \tfrac{2}{27}\,\mathrm{Sin}\,3x$$
$$= \tfrac{1}{3}\left(x^2+x+\tfrac{7}{9}\right)\mathrm{Sin}\,3x + \tfrac{1}{9}(2x+1)\,\mathrm{Cos}\,3x.$$

Можно находить интегралы этого вида примѣняя способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, стоитъ только написать равенство:

$$\int (ax^n + bx^{n-1}cx^{n-2} + \ldots + kx + l)\,\mathrm{Cos}\,\mu x\,dx =$$
$$= (Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Kx + L)\,\mathrm{Cos}\,\mu x +$$
$$+ (A_1x^n + B_1x^{n-1} + \ldots + K_1x + L_1)\,\mathrm{Sin}\,\mu x$$

продифференцировать его и опредѣлить неизвѣстные коэффиціенты: A, B . . . . K, L; A_1, B_1 . . . . L_1 такъ чтобы полученное послѣ дифференцированія равенство имѣло мѣсто тожественно.

Такъ въ нашемъ примѣрѣ пишемъ:

$$\int (x^2+x+1)\,\mathrm{Cos}\,3x\,dx = (Ax^2+Bx+C)\,\mathrm{Cos}\,3x +$$
$$+ (A_1x^2 + B_1x + C_1)\,\mathrm{Sin}\,3x$$

послѣ дифференцированія имѣемъ:

$$(x^2+x+1)\,\mathrm{Cos}\,3x = -3\,\mathrm{Sin}\,3x\,[Ax^2+Bx+C] +$$
$$+ (2Ax+B)\,\mathrm{Cos}\,3x$$
$$+ 3\,\mathrm{Cos}\,3x\,[A_1x^2 + B_1x + C_1] + (2A_1x + B_1)\,\mathrm{Sin}\,3x$$

или:

$$(x^2+x+1)\operatorname{Cos} 3x = [3A_1x^2+(3B_1+2A)x+$$
$$+(3C_1+B)]\operatorname{Cos} 3x+$$
$$+[-3Ax^2+(2A_1-3B)x+(B_1-3C)]\operatorname{Sin} 3x.$$

Чтобы это равенство имѣло мѣсто тожественно необходимо чтобы было:

$$3A_1 = 1$$
$$3B_1+2A = 1$$
$$3C_1+B = 1$$
$$-3A = 0$$
$$2A_1-3B = 0$$
$$B_1-3C = 0$$

откуда слѣдуетъ:

$$A_1=\tfrac{1}{3};\quad B=\tfrac{2}{9};\quad A=0;\quad B_1=\tfrac{1}{3};\quad C=\tfrac{1}{9};\quad C_1=\tfrac{7}{27},$$

слѣдовательно:

$$\int(x^2+x+1)\operatorname{Cos} 3x\,dx = \left(\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{1}{3}x+\tfrac{7}{27}\right)\operatorname{Sin} 3x+$$
$$+\left(\tfrac{2}{9}x+\tfrac{1}{9}\right)\operatorname{Cos} 3x$$

какъ мы нашли и раньше.

§ 115. Обратимъ еще вниманіе на слѣдующіе интегралы:

$$\int \operatorname{Sin} ax \operatorname{Cos} bx\cdot dx;\qquad \int \operatorname{Sin} ax \operatorname{Sin} bx\cdot dx$$
$$\int \operatorname{Cos} ax\cdot \operatorname{Cos} bx\cdot dx$$

чтобы найти эти интегралы воспользуемся слѣдующими формулами тригонометріи:

$$\operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} B = 2 \operatorname{Sin} \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{Cos} \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{Sin} A - \operatorname{Sin} B = 2 \operatorname{Sin} \frac{A-B}{2} \cdot \operatorname{Cos} \frac{A+B}{2}$$

$$\operatorname{Cos} A + \operatorname{Cos} B = 2 \operatorname{Cos} \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{Cos} \frac{B-A}{2}$$

$$\operatorname{Cos} A - \operatorname{Cos} B = 2 \operatorname{Sin} \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{Sin} \frac{B-A}{2}.$$

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ что:

$$\operatorname{Sin} ax \cdot \operatorname{Cos} bx = \tfrac{1}{2} [\operatorname{Sin} (a+b)x + \operatorname{Sin} (a-b)x]$$

$$\operatorname{Sin} ax \ \operatorname{Sin} bx = \tfrac{1}{2} [\operatorname{Cos} (a-b)x - \operatorname{Cos} (a+b)x]$$

$$\operatorname{Cos} ax \ \operatorname{Cos} bx = \tfrac{1}{2} [\operatorname{Cos} (a-b)x + \operatorname{Cos} (a+b)x]$$

слѣдовательно:

$$\int \operatorname{Sin} ax \operatorname{Cos} bx \cdot dx = \tfrac{1}{2} \int \operatorname{Sin} (a+b)x \cdot dx -$$

$$- \tfrac{1}{2} \int \operatorname{Sin} (a-b)x \cdot dx =$$

$$= - \frac{1}{2(a+b)} \operatorname{Cos} (a+b)x + \frac{1}{2(a-b)} \operatorname{Cos} (a-b)x;$$

$$\int \operatorname{Sin} ax \operatorname{Sin} bx \, dx = \tfrac{1}{2} \int \operatorname{Cos} (a-b)x \, dx -$$

$$- \tfrac{1}{2} \int \operatorname{Cos} (a+b)x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2(a-b)} \operatorname{Sin} (a-b)x - \frac{1}{2(a+b)} \operatorname{Sin} (a+b)x.$$

$$\int \mathrm{Cos}\, x\, \mathrm{Cos}\, bx\, dx = \tfrac{1}{2}\int \mathrm{Cos}\,(a-b)\,x\, dx + \\ + \tfrac{1}{2}\int \mathrm{Cos}\,(a+b)\,x\, dx = \\ = \frac{1}{2\,(a-b)}\,\mathrm{Sin}\,(a-b)\,x + \frac{1}{2\,(a+b)}\,\mathrm{Sin}\,(a+b)\,x.$$

Такъ напримѣръ:

$$\int \mathrm{Sin}\, 3x\, \mathrm{Sin}\, 2x\, dx = \tfrac{1}{2}\int \mathrm{Cos}\, x\, dx - \tfrac{1}{2}\int \mathrm{Cos}\, 5x\, dx = \\ = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\, x - \tfrac{1}{10}\,\mathrm{Sin}\, 5x + C.$$

Легко видѣть, что если бы былъ, напримѣръ, предложенъ интегралъ:

$$\int \mathrm{Cos}\, ax\, \mathrm{Sin}\, bx\, \mathrm{Sin}\, cx\, .\, dx.$$

подъ знакомъ котораго стояло бы произведеніе трехъ или большаго числа множителей, изъ коихъ каждый косинусъ или синусъ кратнаго аргумента x, то воспользовавшись предыдущими формулами для произведенія напр. первыхъ двухъ множителей, мы предложенный интегралъ могли бы замѣнить суммою двухъ другихъ того-же вида, но подъ знаками которыхъ число множителей было-бы единицею меньше. Съ этими интегралами опять поступили бы также, пока бы не дошли до интеграловъ, подъ знакомъ которыхъ стоялъ бы одинъ косинусъ или одинъ синусъ кратнаго аргумента x. Эти же послѣдніе найдемъ непосредственно:

Въ томъ случаѣ когда $a = b$ мы имѣемъ интегралы

$$\int \mathrm{Cos}^2\, ax\, dx \quad \text{и} \quad \int \mathrm{Sin}^2\, ax\, dx.$$

Чтобы найти ихъ замѣчаемъ, что

$$2\,\mathrm{Cos}^2\, ax = 1 + \mathrm{Cos}\, 2ax$$

и

$$2\,\mathrm{Sin}^2\,ax = 1 - \mathrm{Cos}\,2ax$$

слѣдовательно:

$$\int \mathrm{Cos}^2\,ax\,dx = \tfrac{1}{2}\int (1 + \mathrm{Cos}\,2ax)\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,x + \tfrac{1}{4a}\,\mathrm{Sin}\,2ax + C$$

и

$$\int \mathrm{Sin}^2\,ax\,dx = \tfrac{1}{2}\int (1 - \mathrm{Cos}\,2ax)\,dx = \tfrac{1}{2}\,x - \tfrac{1}{4a}\,\mathrm{Sin}\,2ax.$$

§ 116. Обратимъ еще вниманіе на слѣдующіе два интеграла:

$$\int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,ax} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{\mathrm{Cos}\,ax}$$

изъ коихъ послѣдній встрѣчается въ Навигаціи въ вопросѣ о вычисленіи меридіанальныхъ частей.

Очевидно имѣемъ:

$$\int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,ax} = \int \frac{dx}{2\,\mathrm{Sin}\,\frac{ax}{2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{ax}{2}} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{ax}{2}\right)}{\mathrm{Sin}\,\frac{ax}{2}\cdot\mathrm{Cos}\,\frac{ax}{2}}$$

Раздѣливъ числителя и знаменателя дроби стоящей подъ знакомъ послѣдняго изъ этихъ интегралов на $\mathrm{Cos}^2\,\frac{ax}{2}$ получимъ:

$$\int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,ax} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{ax}{2}\right)}{\frac{\mathrm{Cos}^2\,\frac{ax}{2}}{tg\,\frac{ax}{2}}} = \frac{1}{a}\,\log \mathrm{tg}\,\frac{ax}{2} + C.$$

Замѣтивъ, что

$$\mathrm{Cos}\,ax = \mathrm{Sin}\left(ax + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

въ силу предыдущей формулы имѣемъ:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{Cos} ax} = \int \frac{dx}{\operatorname{Sin}\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{a} \log \operatorname{tg} \left(\frac{ax + \frac{\pi}{2}}{2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{a} \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + C.$$

ГЛАВА XVI.

Приложенія интегральнаго исчисленія къ вычисленію площадей, объемовъ и т. п.

§ 117. Мы видѣли, что когда уравненіе кривой задано въ видѣ $y = f(x)$, то площадь заключенная между кривою осью x и двумя ординатами соотвѣтствующими абсциссамъ x_0 и X выражается опредѣленнымъ интеграломъ

$$S = \int_{x_0}^{x} f(x) \cdot dx = \int_{x_0}^{x} y dx$$

такую площадь будемъ называть *простою*.

Покажемъ теперь, что *какую угодно площадь ограниченную произвольными линіями можно привести къ алгебраической суммѣ простыхъ площадей*, пусть напр. будетъ дана площадь $ABCD$ ограниченная четырьмя различными кривыми AB, BC, CD и AD (фиг. 20).

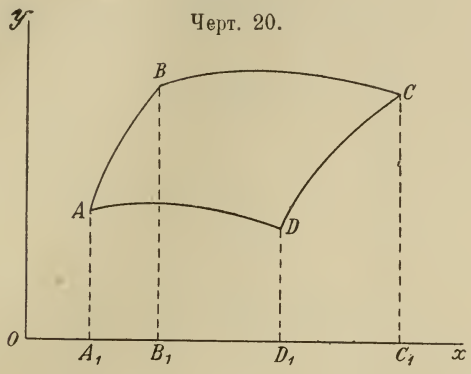
Проведемъ ординаты AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, тогда очевидно будетъ: площать $ABCD$ = пл. ABB_1A_1 + пл. BCC_1D_1 — пл. DCC_1D_1 — пл. ADD_1A_1 всѣ площади во второй части этого равенства простыя.

Если бы площадь была ограничена со всѣхъ сторонъ одною и тою же кривою, то и тогда она приведется къ простымъ

площадямъ. Прежде всего надо опредѣлить тѣ точки, гдѣ касательная перпендикулярна оси $x^{\text{овъ}}$, для этой цѣли, если уравненіе кривой есть

$$F(xy) = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Черт. 20.

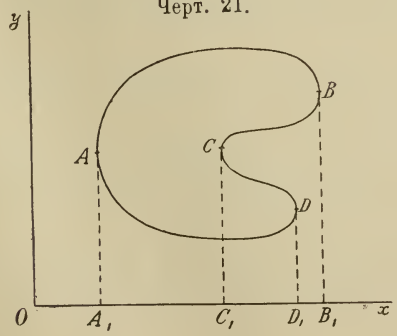


то надо составить уравненіе

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

и рѣшить уравненія (1) и (2) совмѣстно относительно x и y. Пусть эти точки будутъ A, B, C, D. Тогда проведя ихъ ординаты и получимъ (чер. 21):

Черт. 21.



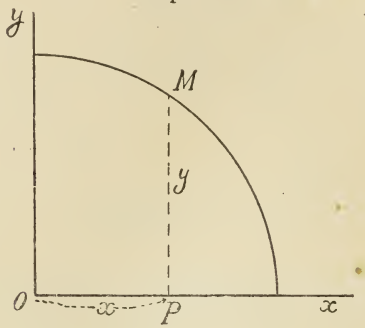
пл. $ABCD =$ пл. $ABB_1A_1 - BCC_1B_1 + CDD_1C_1 - ADD_1A$

причемъ всѣ эти площади простыя.

Такимъ образомъ все приводится къ вычисленію простыхъ площадей, т. е. къ вычисленію опредѣленныхъ интеграловъ.

Примѣръ 1-й. Площадь четверти круга (черт. 22).

Черт. 22.



Уравненіе круга:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

откуда

$$y = +\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$S = \int_0^a y dx = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, . \, dx.$$

Найдемъ сперва неопредѣленный интегралъ

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, . \, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int \frac{(a^2 - x^2 - a^2) dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int \sqrt{a^2 - x^2} \, . \, dx +$$

$$+ a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int \sqrt{a^2 - x^2} \, . \, dx + a^2 \operatorname{arc\,Sin} \frac{x}{a}$$

и слѣдовательно:

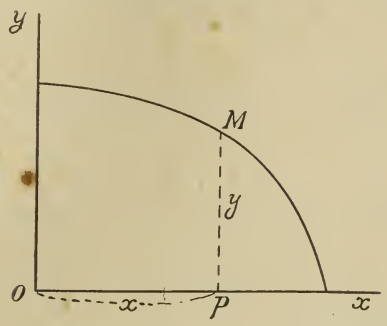
$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, . \, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arc\,Sin} \frac{x}{a}$$

подставляя предѣлы и замѣчая, что arc Sin 1 $= \frac{\pi}{2}$ получимъ

$$S = \frac{\pi \cdot a^2}{4}.$$

Примѣръ 2-й. Площадь эллипса (черт. 23).

Черт. 23.



Уравненіе эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

отсюда для положительной четверти:

$$y = + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$S = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, . \, dx = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, . \, dx.$$

Въ предыдущемъ примѣрѣ показано, что

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, . \, dx = \frac{\pi a^2}{4}$$

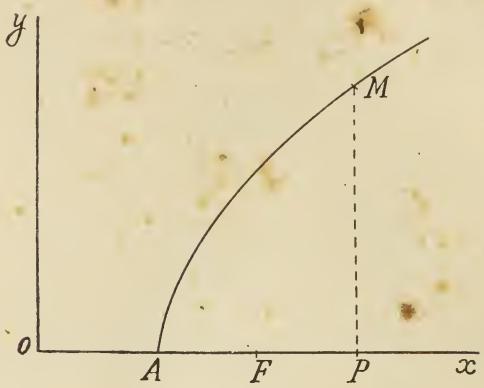
и слѣдовательно

$$S = \frac{\pi ab}{4}$$

и полная площадь эллипса $= 4\,S = \pi ab.$

Примѣръ 3-й. Площадь гиперболическаго сегмента заключеннаго между вершиною, осью и ординатою. (Черт. 24).

Черт. 24.



Уравненіе гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

откуда

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

$$S = \int_a^x \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx = \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx$$

интегралъ

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx = x\sqrt{x^2 - a^2} = \int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{(x^2 - a^2 + a^2)\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx +$$

$$+ a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} =$$

$$= \int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx + a^2 \log \left[x + \sqrt{x^2 - a^2}\right]$$

и слѣдовательно:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx =$$

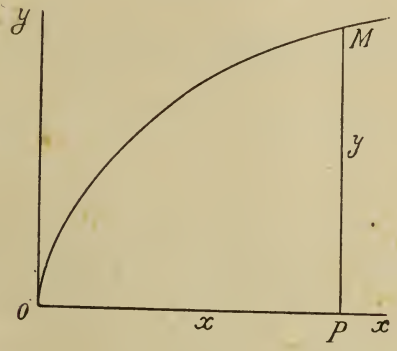
$$= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} + a^2 \log \left[x + \sqrt{x^2 - a^2}\right] + C.$$

такимъ образомъ:

$$S = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} + a^2 \log \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right).$$

Примѣръ 4-й. Площадь параболы. (Черт. 25).

Черт. 25.



Уравненіе параболы возьмемъ въ простѣйшемъ видѣ:

$$y^2 = 2px$$

откуда

$$y = \sqrt{2p} \cdot \sqrt{x}$$

$$S = \int_0^x \sqrt{2p} \cdot \sqrt{x} \cdot dx = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{2px} \cdot x = \frac{2}{3} xy.$$

Примѣръ 5-й. Найти площадь ограниченную одною вѣтвью циклоиды.

Зададимъ циклоиду двумя уравненіями, выражающими координаты x и y произвольной ея точки въ функціи перемѣнной независимой t:

$$x = a(t - \operatorname{Sin} t)$$

$$y = a(1 - \operatorname{Cos} t)$$

у насъ будетъ

$$dx = a(1 - \cos\ t) \,.\, dt$$

и т. к. для цѣлой вѣтви t измѣняется отъ 0 до 2π, то будетъ:

$$S = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \operatorname{Cos} t)^2 \,.\, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \operatorname{Cos} t)^2 \,.\, dt$$

Интегралъ:

$$\int (1 - \operatorname{Cos} t)^2 \,.\, dt = \int (1 - 2 \operatorname{Cos} t + \operatorname{Cos}^2 t)\, dt =$$

$$= t - 2 \operatorname{Sin} t + \tfrac{1}{2} \int (1 + \operatorname{Cos} 2t)\, dt =$$

$$= t - 2 \operatorname{Sin} t + \tfrac{1}{2}\, t + \tfrac{1}{4} \operatorname{Sin} 2t = \tfrac{3}{2} t - 2 \operatorname{Sin} t + \tfrac{1}{4} \operatorname{Sin} 2t,$$

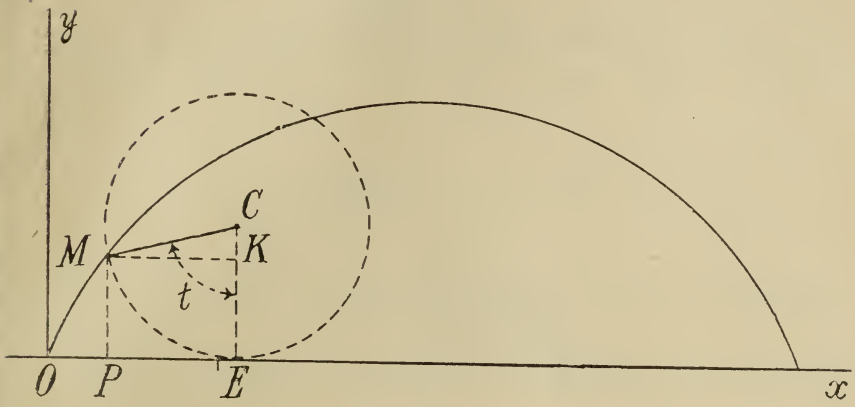
и слѣдовательно будетъ:

$S = 3\pi \,.\, a^2 = 3$ площадь производящаго круга.

Примѣчаніе. Циклоидою называется кривая описываемая точкою круга, катящагося безъ скольженія по неподвижной прямой. Чтобы составить уравненія циклоиды примемъ упомянутую въ опредѣленіи прямую за ось x-овъ, за начало координатъ возьмемъ то положеніе описываю-

щей кривую точки M, когда эта точка лежитъ на оси $x^{\text{овъ}}$, и положимъ, что кругъ катится въ сторону положительныхъ $x^{\text{овъ}}$. Пусть кругъ изъ начальнаго своего положенія перемѣстился въ показанное на чертежѣ (26), такъ что

Черт. 26.



радіусъ проходящій черезъ точку M повернулся на уголъ t, отъ своего первоначальнаго направленія. Очевидно, что перемѣщеніе центра круга OE равно дугѣ его поворота EM, ибо кругъ катится безъ скольженія. Обозначая черезъ a радіусъ круга и черезъ x и y координаты точки M имѣемъ:

$$OE = ME = a \,.\, t$$

$$x = OP = OE - MK = ta - a \operatorname{Sin} t = a(t - \operatorname{Sin} t)$$

$$y = PM = EC - CK = a - a \operatorname{Cos} t = a(1 - \operatorname{Cos} t)$$

Если бы мы пожелали представить циклоиду однимъ уравненіемъ, то надо изъ вышеприведенныхъ двухъ исключить букву t.

Площади кривыхъ въ полярныхъ координатахъ.

§ 117. Положимъ что уравненіе кривой дано въ полярныхъ координатахъ

$$r = f(\theta).$$

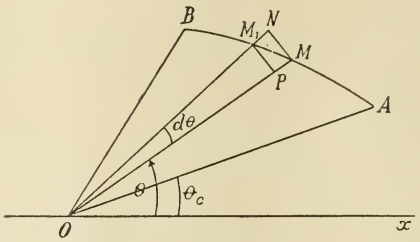
Простою площадью въ этомъ случаѣ будетъ площадь ограниченная двумя радіусами векторами и кривою. (Черт. 27).

Пусть площадь $AOM = S$; очевидно, что эта площадь будетъ функціей угла θ, составляемаго конечнымъ радіусомъ, векторомъ OM и осью Ox. Найдемъ производную этой функціи.

Имѣемъ:

$$\Delta S = MOM_1$$

Черт. 27.



Опишемъ радіусами OM_1 и OM дуги MP_1 и MN, очевидно будетъ:

$$\text{площ. } POM_1 < MOM_1 < MON$$

$$\frac{1}{2} r \cdot r \Delta\theta < \Delta S < \frac{1}{2} (r + \Delta r)(r + \Delta r) \Delta\theta$$

или

$$\frac{1}{2} r^2 \Delta\theta < \Delta S < \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta + \varepsilon \cdot \Delta\theta$$

причемъ ε есть безконечно малая обращающая въ нуль вмѣстѣ съ $\Delta\theta$. Отсюда:

$$\frac{1}{2} r^2 > \frac{\Delta S}{\Delta\theta} > \frac{1}{2} r^2 + \varepsilon$$

и слѣдовательно

$$\text{пред. } \frac{\Delta S}{\Delta\theta} = S' = \frac{1}{2} r^2$$

значитъ

$$dS = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

и слѣдовательно площадь S будетъ выражаться такъ:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} r^2\, d\vartheta\,.$$

Если уголъ xOB соотвѣтствующій заданному радіусу OB обозначимъ черезъ θ, то площадь сектора AOB выразится такъ:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\vartheta_0}^{\theta} r^2\, d\vartheta = \frac{1}{2}\int_{\vartheta_0}^{\theta} [F(\vartheta)]^2 \cdot d\vartheta$$

причемъ $r = F(\vartheta)$ есть уравненіе кривой AB въ полярныхъ координатахъ.

Примѣръ. Опредѣлить площадь заключенную внутри кривой:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Эта кривая имѣетъ показанный на чертежѣ видъ и называется *Декартовымъ листомъ*. (Черт. 28).

Сдѣлаемъ

$$x = r\cos\vartheta$$

$$y = r\,\mathrm{Sin}\,\vartheta$$

подставляя, получимъ уравненіе кривой въ полярныхъ координатахъ:

$$r = 3a \cdot \frac{\mathrm{Cos}\,\vartheta\,\mathrm{Sin}\,\vartheta}{\mathrm{Cos}^3\vartheta + \mathrm{Sin}^3\vartheta}\,.$$

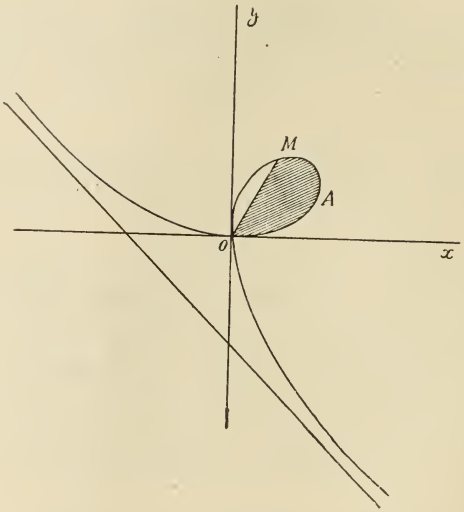
Опредѣлимъ площадь сектора OAM; будемъ имѣть

$$\text{площ. } OAM = \frac{1}{2}\int_{O}^{\vartheta} r^2\, d\vartheta = \frac{9a^2}{2}\int_{O}^{\vartheta} \frac{\mathrm{Cos}^2\vartheta\,\mathrm{Sin}^2\vartheta \cdot d\vartheta}{(\mathrm{Cos}^3\vartheta + \mathrm{Sin}^3\vartheta)^2}$$

по

$$\int \frac{\text{Cos}^2\vartheta \cdot \text{Sin}^2\vartheta \cdot d\vartheta}{(\text{Cos}^3\vartheta + \text{Sin}^3\vartheta)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,\text{tg}^2\vartheta \cdot d\,\text{tg}\,\vartheta}{(1+\text{tg}^3\vartheta)^2} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\text{tg}^3\vartheta}$$

Черт. 28.



и значитъ будетъ:

$$\text{площ. } OAM = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{1}{1+\text{tg}^3\vartheta}\right]\cdot\frac{9a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}\left[1 - \frac{1}{1+\text{tg}^3\vartheta}\right].$$

Для площади всего завитка надо сдѣлать $\theta = \frac{\pi}{2}$ и получится:

$$\text{Площадь Декартова листа} = \frac{3a^2}{2}.$$

Вычисленіе объемовъ.

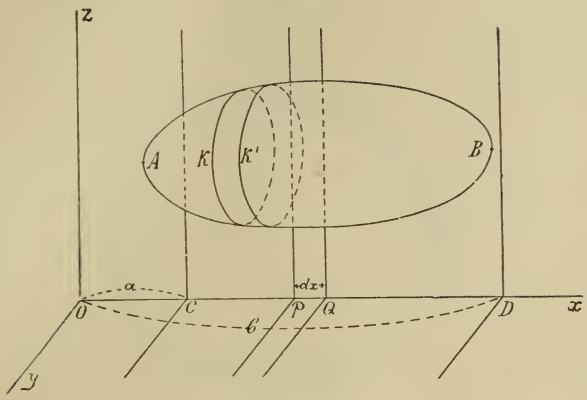
§ 118. *Вычисленіе объема* ограниченного кривою поверхностью можетъ быть также приведено къ вычисленію простыхъ опредѣленныхъ интеграловъ.

Пусть данъ объемъ V ограниченный какою-нибудь сомкнутою поверхностью (фиг. 29).

Проведя къ этой поверхности касательныя плоскости параллельныя плоскости zoy, мы получимъ абсциссы a и b край-

нихъ точекъ этой поверхности; раздѣливъ отрѣзокъ CD на безконечно-малыя части и проведя черезъ точки дѣленія пло-

Черт. 29.



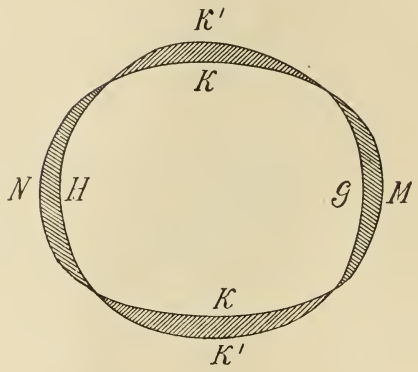
скости параллельныя zoy, мы разсѣчемъ данный объемъ на безконечно тонкіе слои, такіе какъ указанный на чертежѣ (29). Каждый изъ этихъ слоевъ ограниченъ двумя плоскостями и заключенною между ними частію поверхности. Эта поверхность пересѣкается съ сказанными плоскостями по кривымъ K и K'.

Вообразимъ что изъ всѣхъ точекъ кривой K проведены прямыя параллельныя оси X до пересѣченія ихъ съ плоскостью Q, тогда получится прямой цилиндръ съ основаніемъ K и высотою PQ, и въ сѣченіи этого цилиндра съ плоскостью Q получится кривая равная K. Совершенно также взявъ кривую K' и построивъ соотвѣтственно ей цилиндръ до пересѣченія съ плоскостью P, мы и на этой плоскости получимъ ту же фигуру, что и на плоскости Q. Такимъ образомъ на каждой изъ этихъ плоскостей получается двѣ кривыя: K и K' (фиг. 30).

Очевидно, что разсматриваемый слой будетъ заключаться внутри цилиндра коего основаніе есть кривая $NK'MK'$, цилиндръ-же съ основаніемъ $KHKG$ будетъ весь заключаться внутри слоя. Въ предѣлѣ, когда разстояніе PQ обращается въ нуль, обѣ кривыя K и K', сливаются въ одну, значитъ

заштрихованная на чертежѣ (фиг. 30) площадь обращается въ предѣлѣ въ нуль и слѣдовательно есть безконечно малая. Такъ какъ высота PQ разсматриваемыхъ цилиндровъ и слоя есть

Черт. 30.



также безконечно-малая, то объемъ слоя отличается отъ объема каждаго изъ этихъ цилиндровъ, а значитъ и отъ объема цилиндра съ основаніемъ K, на безконечно-малыя величины высшихъ порядковъ. При разысканіи предѣла суммы, можно эти безконечно-малыя высшихъ порядковъ отбрасывать и разсматривать заданный объемъ какъ предѣлъ суммы объемовъ цилиндровъ съ основаніемъ K.

Обозначимъ черезъ ω площадь кривой K соотвѣтствующей плоскости P, абсцисса коей есть x, очевидно что ω будетъ нѣкоторой функціей отъ x. Пусть

$$\omega = F(x).$$

Тогда объемъ сказаннаго цилиндра съ основаніемъ ω будетъ: $\omega\,dx$ и предѣлъ суммы такихъ объемовъ будетъ выражаться интеграломъ $\int_a^b \omega\,dx$, и мы получимъ формулу:

$$V = \int_a^b \omega\,dx = \int_a^b F(x)\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

гдѣ $\omega = F(x)$ есть площадь сѣченія соотвѣтствующаго абсциссѣ x. Такимъ образомъ вычисленіе объема приводится къ вычисленію площадей сѣченія, и затѣмъ опредѣленнаго интеграла (6).

Примѣры: 1) Объемъ конуса.

Пусть данъ конусъ вершина коего находится въ началѣ координатъ O и основаніе въ плоскости перпендикулярной оси x-овъ въ разстояніи равномъ h отъ начала.

Обозначимъ площадь основанія черезъ A, тогда очевидно, что площадь ω сѣченія соотвѣтствующаго абсциссѣ x опредѣлится изъ пропорціи

$$\omega : A = x^2 : h^2$$

и будетъ

$$\omega = A \cdot \frac{x^2}{h^2}$$

слѣдовательно искомый объемъ конуса будетъ

$$V = \int_0^h \omega \, dx = \int_0^h \frac{A}{h^2} x^2 \, dx = \frac{1}{3} A \cdot h.$$

2) Объемъ шара.

Положимъ что данъ шаръ, центръ котораго возьмемъ въ началѣ координатъ, и радіусъ котораго равенъ R. Проведемъ сѣченіе плоскость котораго перпендикулярна оси x-овъ и отстоитъ отъ начала координатъ на x. Очевидно, что это сѣченіе есть кругъ радіусъ котораго

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}$$

слѣдовательно площадь этого сѣченія

$$\omega = \pi r^2 = \pi (R^2 - x^2).$$

Такъ какъ абсциссы крайнихъ точекъ шара суть $-R$ и $+R$ то объемъ его выразится формулою:

$$V = \int_{-R}^{+R} \omega \, dx = \int_{R}^{+R} \pi (R^2 - x^2) \, dx = \frac{4}{3} \pi R^3 .$$

Приближенное вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ.

§ 119. Вычисленіе опредѣленнаго интеграла

$$S = \int_a^b f(x) \, dx$$

когда функція $f(x)$ задана аналитически и когда можетъ быть найденъ неопредѣленный интегралъ

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C$$

производится по формулѣ:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Въ тѣхъ случаяхъ, когда неопредѣленный интегралъ найденъ быть не можетъ, приходится для вычисленія опредѣленнаго интеграла пользоваться приближенными формулами.

Точность этихъ формулъ можетъ быть сдѣлана сколько угодно большею, но для практики обыкновенно нѣтъ надобности въ большой точности.

Итакъ положимъ, что надо найти величину опредѣленнаго интеграла.

$$S = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Что-бы этотъ интегралъ собою не представлялъ, всегда можно вообразить такую кривую, уравненіе которой было-бы

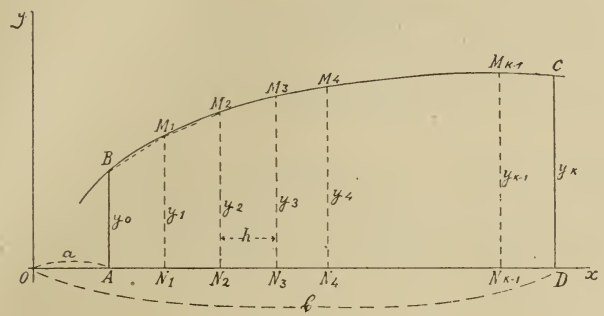
$$y = f(x)$$

тогда интегралъ будетъ представлять собою площадь $ABCD$,

ограниченную частію оси x, двумя ординатами и кривою, значитъ численно эта площадь и будетъ равна интегралу S.

Чтобы найти площадь $ABCD$ (фиг. 31) одинъ изъ простѣйшихъ пріемовъ состоитъ въ томъ, что основаніе AD раздѣляется на нѣсколько равныхъ частей, черезъ точки дѣленія

Черт. 31.



проводятъ ординаты и концы ихъ соединяютъ прямыми линіями и получаютъ такимъ образомъ ломанную, вписанную въ данную кривую, какъ показано на чертежѣ, и вмѣсто площади $ABCD$ берутъ площадь, ограниченную этой ломанной $BM_1 M_2 \ldots . M_{k-1} C$. Эта послѣдняя площадь, представляя собою сумму площадей трапецій такихъ, какъ $N_1 M_1 M_2 N_2$ легко вычисляется, если измѣрены или вычислены ординаты y_0, y_1, y_2, ... y_k, именно будетъ:

$$\text{площ. } BM_1 M_2 \ldots . M_{k-1} D = \tfrac{1}{2}(y_0+y_1) . h + \tfrac{1}{2}(y_1+y_2)h +$$

$$+ \tfrac{1}{2}(y_2+y_3)h + \ldots . + \tfrac{1}{2}(y_{k-1}+y_{k-1})h +$$

$$+ \tfrac{1}{2}(y_{k-1}+y_k) . h = \left(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{k-1} + \tfrac{1}{2}y_k\right) . h$$

гдѣ h есть разстояніе между двумя смежными ординатами равное $\frac{b-a}{k}$.

Принявъ эту площадь за площадь кривой, мы получимъ для вычисленія опредѣленнаго интеграла $\int_a^b y dx$ такую приближенную формулу:

$$\int_a^b y dx = \frac{b-a}{k}\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots y_{k-1} + \frac{1}{2}y_k\right). \quad (1)$$

Если $y = f(x)$, то полагая:

$$x_0 = a$$
$$x_1 = a + h$$
$$x_2 = a + 2h$$
$$\ldots\ldots$$
$$x_{k-1} = a + (k-1)h$$
$$x_k = a + kh = b$$

получимъ

$$y_0 = f(x_0)$$
$$y_1 = f(x_1)$$
$$y_2 = f(x_2)$$
$$\ldots\ldots$$
$$y_k = f(x_k)$$

и предыдущая формула напишется такъ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{k}\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{k-1}) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}f(x_k)\right]. \quad \ldots\ldots \quad (1a).$$

Эта формула называется формулою трапецій, и можетъ служить для вычисленія любого опредѣленнаго интеграла по частнымъ значеніямъ подъинтегральной функціи.

Нетрудно видѣть, что чѣмъ число k будетъ больше, тѣмъ точнѣе будетъ результатъ, даваемый этой формулой. Мы не будемъ выводить общаго выраженія погрѣшности этой формулы.

Формула Симпсона.

§ 120. Другой пріемъ вычисленія площади S основанъ на замѣнѣ частей данной кривой, не прямыми, какъ въ правилѣ трапецій, а дугами параболъ; оси которыхъ параллельны оси Y. Получаемая такимъ путемъ приближенная формула называется формулою Симпсона.

Перенесемъ начало координатъ въ точку A (черт. 32) сохраняя направленіе осей, и возьмемъ участокъ BM_2 нашей кривой. Уравненіе параболы, коей ось параллельна оси y есть:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

проведемъ эту параболу такъ, чтобы она проходила черезъ точки B, M_1 и M_2, ею и замѣнимъ часть BM_2 данной кривой. Чтобы парабола (*) проходила черезъ точки B, M_1, M_2, надо опредѣлить коэффиціенты A_0, A_1, A_2 такъ, чтобы координаты этихъ точекъ удовлетворяли уравненію (**), что дастъ слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= A_0 \\ y_1 &= A_0 + A_1 h + A_2 h^2 \\ y_2 &= A_0 + 2A_1 h + 4A_2 h^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (**).$$

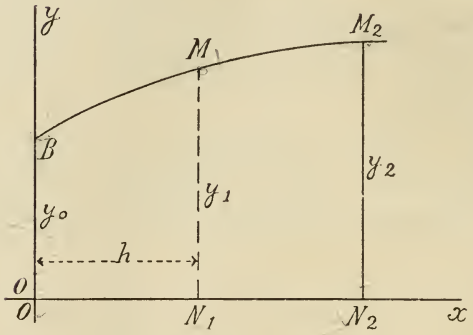
Площадь, заключенная между параболой (*) осью x и ординатами OB и $N_2 M_2$, выражается интеграломъ:

$$\int_0^{2h} y\,dx = \int_0^{2h} (A_0 + A_1 x + A_2 x^2)\,dx = 2A_0 h + 2A_1 h^2 + \frac{8A_2 h^3}{3} =$$

$$= \frac{h}{3}(6A_0 + 6A_1 h + 8A_2 h^2).$$

Въ силу же уравненій (**) величина, стоящая въ скобкахъ равна $y_0 + 4y_1 + y_2$, въ чемъ убѣждаемся умноживъ

Черт. 32.



второе изъ этихъ уравненій на 4 и приложивъ къ двумъ остальнымъ.

Такимъ образомъ получаемъ приближенную формулу:

$$\text{пл. } OBM_2N_2 = (y_0 + 4y_1 + y_2) \cdot \frac{h}{3} \quad . \quad . \quad (***).$$

Положимъ, что число дѣленій k четное $k = 2n$, тогда совершенно также, замѣнивъ дугу $M_2 M_3 M_4$ данной кривой параболой, проходящей черезъ точки M_2, M_3 и M_4, получимъ:

$$\text{пл. } N_2 M_2 M_4 N_4 = (y_2 + 4y_3 + y_4) \cdot \frac{h}{3}.$$

Точно также

$$\text{пл. } N_4 M_4 M_6 N_6 = (y_4 + 4y_5 + y_6) \cdot \frac{h}{3}$$

и т. д. Сложивъ эти формулы получимъ:

$$\text{пл. } ABCD = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_5 + \ldots + 4y_{n-1} + y_{2n}\right]$$

а значитъ и такую формулу для вычисленія опредѣленнаго интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{3}\frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\right] \quad \ldots \quad (2)$$

которая и называется *формулой Симпсона.*

§ 121. Дадимъ теперь примѣръ, чтобы показать приложеніе предыдущихъ формулъ.

Пусть надо найти интегралъ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot dx = -\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

вычислимъ этотъ интегралъ по приближеннымъ формуламъ:

1) *Формула трапецій.* Возьмемъ $n = 10$, тогда величина промежутка h будетъ: $h = \frac{1}{10} \cdot \frac{\pi}{2} = 0{,}1570796\ldots = 9^\circ$.

Значенія аргументовъ x будутъ:

$$0^\circ,\ 9^\circ,\ 18^\circ,\ 27^\circ \ldots\ 81^\circ,\ 90^\circ$$

и слѣдовательно:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot dx = 0{,}157\ldots\Big[\frac{1}{2} \cdot \sin 0^\circ + \sin 9^\circ + \ldots + \sin 81^\circ + \frac{1}{2}\sin 90^\circ\Big].$$

Итакъ имѣемъ:

Sin 0° = 0,00000	Sin 54° = 0,80902
Sin 9° = 0,15643	Sin 63° = 0,89101
Sin 18° = 0,30902	Sin 72° = 0,95106
Sin 27° = 0,45399	Sin 81° = 0,98769
Sin 36° = 0,58779	$\frac{1}{2}$ Sin 90° = 0,50000
Sin 45° = 0,70711	
2,21434	4,13878
4,13878	
Σ = 6,35312	log Σ = 0,8029871
	log h = 1,1961208
	log S = 1,9990979
	S = 0,997925.

2) *Правило Симпсона*, которое мы для удобства вычисленія напишемъ такъ:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{2}{3}h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2) + \ldots + \frac{1}{2}f(x_{2n})\right]$$

даетъ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin}\, x \cdot dx = \frac{2}{3} \cdot 0{,}157\ldots \left[\frac{1}{2}\text{Sin}\, 0° + 2\text{Sin}\, 9° + \text{Sin}\, 18° + \right.$$
$$\left. + 2\,\text{Sin}\, 27° + \ldots + 2\,\text{Sin}\, 81° + \frac{1}{2}\,\text{Sin}\, 90°\right].$$

Такимъ образомъ будетъ:

$\frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\ 0^\circ = 0{,}00000$	$\mathrm{Sin}\ 9^\circ = 0{,}15643$
$\mathrm{Sin}\ 18^\circ = 0{,}30902$	$\mathrm{Sin}\ 27^\circ = 0{,}45399$
$\mathrm{Sin}\ 36^\circ = 0{,}58779$	$\mathrm{Sin}\ 45^\circ = 0{,}70711$
$\mathrm{Sin}\ 54^\circ = 0{,}80902$	$\mathrm{Sin}\ 63^\circ = 0{,}89101$
$\mathrm{Sin}\ 72^\circ = 0{,}95106$	$\mathrm{Sin}\ 81^\circ = 0{,}98769$
$\frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\ 90^\circ = 0{,}50000$	
$3{,}15689$	$3{,}19623$
$6{,}39246$	
$\Sigma = 9{,}54935$	
$\frac{2}{3}\,\Sigma = 6{,}36623..$	$\log \frac{2}{3}\,\Sigma = 0{,}8038823$
	$\log h = 1{,}1961208$
	$\log \frac{2}{3}\cdot h\cdot \Sigma = 0{,}0000031$
	$S = \frac{2}{3}\,h\Sigma = 1{,}000007.$

Само собою понятно, что за послѣднюю цифру ручаться нельзя, ибо все вычисленіе произведено на пять знаковъ.

Этотъ примѣръ показываетъ насколько точные результаты, можно получать пользуясь вышеприведенными формулами.

Когда подъинтегральная функція задана аналитически, то

можно составить и общія выраженія предѣловъ погрѣшности происходящей отъ примѣненія формулъ трапецій или Симпсона, но это не входитъ въ нашъ курсъ.

Задачи.

Для упражненія въ нахожденіи неопредѣленныхъ интеграловъ прилагается слѣдующее собраніе примѣровъ, заимствованное изъ L. A. Soncke's Sammlung von Aufgaben aus der Integralrechnung.

Во всѣхъ этихъ примѣрахъ постоянная произвольная, которая входитъ въ составъ неопредѣленнаго интеграла, подразумѣвается и для простоты набора не напечатана.

I.

1) $\int x \,.\, dx = \frac{1}{2} x^2.$ 2) $\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3.$

3) $\int x^n \,.\, dx = \frac{1}{n+1} \,.\, x^{n+1}.$ 4) $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}.$

5) $\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)\,.\,x^{n-1}}.$ 6a) $\int \frac{dx}{x} = \log x.$

6b) $\int \frac{dx}{nx+a} = \frac{1}{n} \log(nx+a).$ 7a) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctang} x.$

7b) $\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctang} \frac{b}{a} x.$

8) $\int \sqrt{x^3} \,.\, dx = \frac{2}{5} \sqrt{x^5}.$ 9) $\int 5\sqrt[3]{x^2} \,.\, dx = 3 \,.\, \sqrt[3]{x^5}.$

10) $\int \frac{3dx}{4\sqrt[4]{x^2}} = -\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}.$ 11) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{4x^3}} \,.\, dx = 2\sqrt{2} \,.\, \sqrt[4]{x}.$

12) $\int (5 - 3x + 5x^2 + 7x^3) \,.\, dx = 5x - \frac{3}{2} x^2 + \frac{5}{3} x^3 + \frac{7}{4} x^4.$

13) $\int\left(\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{6}{x^4}-\frac{8}{x^5}\right).dx=-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^4}.$

14) $\int\left(\frac{5}{x^4}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-4+7x^6\right).dx=-\frac{5}{3x^3}+\frac{1}{x}+$

$+3\log x-4x+x^7.$

15) $\int\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}.dx=\left(\frac{9}{7}x^2+6\right).\sqrt[3]{x}.$

16) $\int(2+5x)^2.dx=4x+10x^2+\frac{25}{3}x^3.$

17) $\int(2x+3x^2)^3.dx=2x^4+\frac{36}{5}x^5+9x^6+\frac{27}{7}x^7.$

18) $\int(1-3x+2x^2)^2.dx=x-3x^2+\frac{13}{3}x^3-3x^4+\frac{4}{5}x^5.$

19) $\int x^2(3+4\sqrt[3]{x^2})^3.dx=9x^3+\frac{324}{11}x^3\sqrt[3]{x^2}+$

$+\frac{432}{13}x^4\sqrt[3]{x}+\frac{64}{5}x^5.$

20) $\int\sqrt[3]{x}.(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2})^3.dx=\frac{6}{17}x^2\sqrt[6]{x^5}-2x^3+$

$+\frac{72}{19}x^3\sqrt[6]{x}-\frac{12}{5}x^3\sqrt[3]{x}.$

21) $\int(2\sqrt[3]{x}+\frac{6x}{\sqrt[3]{x}}-9x)^2\,dx=27x^3-\frac{81}{2}x^2\sqrt[3]{x^2}+$

$+12x^2+\frac{12}{5}x\sqrt[3]{x^2}.$

22) $\int\frac{\sqrt[6]{x}}{x}.\left(6\sqrt[4]{x^3}+3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2.dx=$

$=21\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+25\frac{7}{17}\sqrt[12]{x^{17}}+7\frac{5}{7}\sqrt[6]{x^7}+20\frac{4}{7}\sqrt[12]{x^7}+$

$+18\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}.$

23) $\int \sqrt[6]{x^5}\,.\,(\sqrt{x}+1)\,.\,(2-\sqrt{x})^2\,.\,dx = \frac{24}{11}\,x\sqrt[6]{x^5} - \frac{18}{17}\,x^2\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{10}\,x^3\sqrt[3]{x}\,.$

24) $\int (\sqrt{x^3}-2\sqrt[3]{x^2})^2\,.\,(\sqrt{x^3}+4\sqrt[3]{x^2})\,.\,dx = x^3\,.\left[\frac{2}{11}\,x^2\sqrt{x} - \frac{72x}{23\sqrt[6]{x}} + \frac{16}{3}\right].$

25) $\int 4x^7\,(12-x^3)\,(6-\frac{1}{5}\,x^3)^3\,.\,dx = (6x^2-\frac{1}{5}\,x^5)^4.$

Указаніе: $4x^7\,(12-x^3)\,(6-\frac{1}{5}\,x^3)^3 = 4\,(12x-x^4)\,(6x^2-\frac{1}{5}\,x^5)^3$, $6x^2-\frac{1}{5}\,x^5 = z$ и т. д.

26) $\int \frac{3x^2}{a^3+x^3}\,.\,dx = \log\,(a^3+x^3).$

27) $\int \frac{3b+6cx}{5(a^2+bx+cx^2)}\,.\,dx = \frac{3}{5}\,l\,(a^2+bx+cx^2).$

Примѣчаніе. Во всѣхъ дальнѣйшихъ примѣрахъ для сокращенія вмѣсто знака log напечатано l, такъ что:

$\frac{3}{5}\,l\,(a^2+bx+cx^2)$ означаетъ

$\frac{3}{5}\log\,(a^2+bx+cx^2).$

28) $\int \frac{2nx-4px^3}{m-nx^2+px^4}\,.\,dx = -\,l\,(m-nx^2+px^4) = l\,\frac{1}{m-nx^2+px^4}\,.$

29) $\int \frac{2-4x}{1-4x+4x^2}\,.\,dx = l\,\frac{1}{1-2x}\,.$

30) $\int \frac{5+x}{10x+x^2}\,.\,dx = \frac{1}{2}\,l\,(10x+x^2).$

31) $\int \frac{3}{4+2x} \cdot dx = \frac{3}{2} \cdot l(4+2x).$

32) $\int \frac{5x}{2+3x} \cdot dx = \frac{5}{3} x - \frac{10}{9} \cdot l(2+3x).$

33) $\int \frac{7x}{4+5x^2} \cdot dx = \frac{7}{10} l(4+5x^2).$

34) $\int \frac{3x}{(2+3x^2)^3} \cdot dx = -\frac{1}{4(2+3x^2)^2} \cdot$

Положимъ $2+3x^2 = z$, тогда

$$\int \frac{3x}{(2+3x^2)^3} dx = \int \frac{1}{2z^3} dz = -\frac{1}{4z^2} = -\frac{1}{4(2+3x^2)^2} \cdot$$

35) $\int \frac{3+10x}{(4+3x+5x^2)^2} \cdot dx = -\frac{1}{4+3x+5x^2} \cdot$

36) $\int \frac{x^3}{3(1+2x)} \cdot dx = \frac{1}{18} x^3 - \frac{1}{24} x^2 + \frac{1}{24} x - \frac{1}{48} l(2x+1).$

37) $\int \frac{x^5}{(3+x)^2} \cdot dx = \frac{1}{4} x^4 - 2x^3 + \frac{27}{2} x^2 - 108x +$

$$+ 405\, l(3+x) + \frac{243}{3+x} \cdot$$

38) $\int \frac{dx}{13-6x+x^2} = \int \frac{dx}{4+(x-3)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctang} \frac{x-3}{2} \cdot$

39) $\int \frac{dx}{-5+6x-x^2} = \int \frac{dx}{4-(x-3)^2} = \frac{1}{4} l \frac{x-1}{5-x} \cdot$

40) $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctang} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \cdot$

41) $\int \frac{dx}{1+x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} l \frac{\sqrt{5}-1+2x}{\sqrt{5}+1-2x} \cdot$

42) $\int \frac{3dx}{9x^2-6x+2} = \operatorname{arctang}(3x-1).$

43) $\int \frac{dx}{2x-3x^2} = \frac{1}{2} l \frac{x}{2-3x}$.

44) $\int \frac{3x+2}{x^2-x-2} dx = \frac{8}{3} l(x-2) + \frac{1}{3} l(x+1)$.

45) $\int \frac{x^3}{(4-2x)^3} \cdot dx = -\frac{x^3-4x^2-8x+20}{8(x-2)^3} - \frac{3}{4} l(x-2)$.

46) $\int \frac{x^2-2}{(x^2-2x+1)^2} \cdot dx = \frac{1+3x-3x^2}{3(x-1)^2}$.

(Дробь: $\frac{x^2-2}{(x^2-2x+1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^4} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2}$).

47) $\int \frac{x^3-4x^2+1}{(x-2)^4} \cdot dx = -\frac{29-30x+6x^2}{3(x-2)^3} + l(x-2)$.

48) $\int \frac{2(x^4-3x)}{(1+2x)^5} \cdot dx = \left[2x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{23}{12}x + \frac{49}{192}\right] \cdot \frac{1}{(1+2x)^4} +$
$+ \frac{1}{16} l(1+2x)$.

49) $\int \frac{5}{x^2(5-6x)^2} \cdot dx = \left(-\frac{1}{x} + \frac{12}{5}\right) \frac{1}{5-6x} - \frac{12}{25} l\left(\frac{5-6x}{x}\right)$.

(Положить $\frac{5}{x} - 6 = z$).

50) $\int \frac{x^5 dx}{(2x+3x^2)^6} =$
$= \frac{1}{3(3x+2)^5}\left[\frac{137}{40} + \frac{231}{16}x + \frac{423}{16}x^2 + \frac{729}{32}x^3 + \frac{243}{32}x^4\right] +$
$+ \frac{1}{64} l \frac{x}{3x+2}$.

51) $\int \frac{x^6-x^3+1}{x^6(3+2x)^2} dx =$
$= \frac{1}{2430x^5(2x+3)}[-162 + 162x - 180x^2 +$
$+ 645x^3 - 1290x^4 - 2935x^5] + \frac{172}{729} l \frac{2x+3}{x}$.

52) $\int \frac{x^2+1}{x^3-x} \cdot dx = l(x+1)+l(x-1)-lx = l\frac{x^2-1}{x}.$

53) $\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} \cdot dx = \frac{9}{10} l(x-2) - \frac{26}{15} l(x+3) + \frac{5}{6} lx.$

54) $\int \frac{9x^2-14x+1}{x^3-2x^2-x+2} \cdot dx = 4l(x+1)+3l(x-2)+2l(x-1)=$

$= l[(x+1)^4 \cdot (x-2)^3 \cdot (x-1)^2].$

55) $\int \frac{5x^2-7ax+11a^2}{x^3-6ax^2+11a^2x-6a^3} \cdot dx = \frac{9}{2} l(x-a) -$

$- 17\, l(x-2a) + \frac{35}{2} l(x-3a).$

56) $\int \frac{7x^2+6}{x^4-5x^3} \cdot dx = \frac{3(5+2x)}{25x^2} + \frac{181}{125} l\left(\frac{x-5}{x}\right).$

57) $\int \frac{3x^2+4}{x^3+x^2-8x-12} \cdot dx = \frac{16}{5(x+2)} + \frac{44}{25} l(x+2) +$

$+ \frac{31}{25} l(x-3).$

58) $\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} \cdot dx = -\frac{x}{(x-1)^2} + l\frac{(x-1)^2}{x}.$

59) $\int \frac{5x^3-2}{x^4-8x^3+18x^2-27} \cdot dx = \frac{955-407x}{16(x-3)^2} + \frac{313}{64} l(x-3) +$

$+ \frac{7}{64} l(x+1).$

60) $\int \frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1} \cdot dx = -\frac{2x^2+7x-3}{2(x^3-x^2-x+1)} +$

$+ l \cdot \frac{x-1}{(x+1)^2}.$

61) $\int \frac{dx}{x^3-x^4-x^5+x^6} dx = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2(1-x)} + 2lx -$

$- \frac{7}{4} l(1-x) - \frac{1}{4} l(1+x).$

62) $\int \frac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)^4}\,dx = -\frac{1}{24}\,\frac{x^3-3x}{(x^2+1)^3} + \frac{7}{16}\,\frac{x}{x^2+1} + \frac{7}{16}\,\text{arctang } x.$

63) $\int \frac{x^5+4}{[(x-1)^2+1]^3}\,dx = -\frac{4x^2-8x+7}{[(x-1)^2+1]^2} + \frac{1}{2}\,l(x^2-2x+2) +$

$+ 5\,\text{arctang}\,(x-1).$

64) $\int \frac{5x^3-27x^2+55x-41}{(x^2-4x+5)^2}\,dx = -\frac{x-1}{(x-2)^2+1} +$

$+ \frac{5}{2}\,l\,(x^2-4x+5) + 2\,\text{arctang}\,(x-2).$

65) $\int \frac{x^4+1}{x\,(x^2+1)^2}\,dx = lx + \frac{1}{1+x^2}.$

66) $\int \frac{7x}{x^3-5x^2+12x-60}\,.\,dx = \frac{35}{37}\,l\,\frac{x-5}{\sqrt{x^2+12}} +$

$+ \frac{42}{37\sqrt{3}}\,.\,\text{arctang}\,\frac{x}{2\sqrt{3}}.$

67) $\int \frac{x^5+1}{x^6+x^4}\,.\,dx = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,l\,(x^2+1) + \text{arctang } x.$

68) $\int \frac{2x^3+3}{x^5-9x}\,.\,dx = \frac{1}{12}\,l(x^4-9) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,l\,\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} -$

$- \frac{1}{3}\,lx + \frac{1}{\sqrt{3}}\,.\,\text{arctang}\,\frac{x}{\sqrt{3}}.$

69) $\int \frac{1-2x^2}{1-x^3}\,.\,dx = \frac{1}{3}\,l\,(x-1) + \frac{5}{6}\,l\,(1+x+x^2) -$

$- \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arccotg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

70) $\int \frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3}\,.\, = \frac{2-2x-5x^2}{4x^2\,(1+x)} + \frac{1}{8}\,l\,\frac{x^2-1}{x^2+1} +$

$+ l\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{4}\,.\,\text{arctang}\,x.$

71) $$\int \frac{5x^3+8x-20}{(x-4)^3(x^2-4x+8)}\,.\,dx = -\frac{83}{4(x-4)^2} - \frac{41}{4(x-4)} -$$

$$- \frac{45}{16} l(x-4) + \frac{45}{32} l(x^2-4x+8) -$$

$$- \frac{3}{16} \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{2}x - 1\right).$$

72) $$\int \frac{3x+2}{x^4+5x^3+13x^2+17x+12}\,.\,dx = \frac{1}{4} l \frac{x^2+2x+3}{x^2+3x+4} +$$

$$+ \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctang} \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{13}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctang} \frac{2x+3}{\sqrt{7}}.$$

73) $$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,.\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

74) $$\int \frac{x^6-x^4-x^2}{x^8-2x^6-x^4-2x^2+1}\,.\,dx = \frac{1}{4\sqrt{5}} l \frac{x^2-x\sqrt{5}+1}{x^2+x\sqrt{5}+1} +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Дробь: $\frac{x^6-x^4-x^2}{x^8-2x^6-x^4-2x^2+1} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} + \frac{x^2-1}{x^4-3x^2+1}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2+x-1} + \frac{1}{x^2-x-1}\right).$$

75) $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx)^2} = \frac{b^2}{a^3}\cdot\frac{1}{a+bx} - \frac{1}{2a^2x^2} + \frac{2b}{a^3x} - \frac{3b^2}{a^4} \log \frac{a+bx}{x}.$$

76) $\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^2\,(x^4+1)} = -\frac{1}{2\,(x-1)} + \frac{1}{2}\,l\,(x-1) +$

$+ \frac{\sqrt{2}-1}{8}\,l\,(x^2+x\sqrt{2}+1) - \frac{\sqrt{2}+1}{8}\,l\,(x^2-x\sqrt{2}+1)$

$- \frac{\sqrt{2}-1}{4}\,\mathrm{arctg}\,(x\sqrt{2}+1) - \frac{\sqrt{2}+1}{4}\,\mathrm{arctg}\,(x\sqrt{2}-1).$

II.

1) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4+2x}} = \frac{1}{15}\,(32 - 8x + 3x^2)\,\sqrt{4+2x}.$

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{5-2x}} = \frac{3}{50\sqrt{5}}\log\frac{\sqrt{5-2x}-\sqrt{5}}{\sqrt{5-2x}-\sqrt{5}}$

$- \frac{1}{100x^2}\,(10+6x)\,\sqrt{5-2x}.$

3) $\int \frac{2+x}{\sqrt[3]{3-x}}\,dx = -\frac{3}{5}\,\sqrt[3]{(3-x)^2}\left(\frac{19}{2}+x\right).$

4) $\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{1+x}} = (1+x)\left(\frac{2}{3}\sqrt{1+x}-1\right).$

5) $\frac{1}{4}\int \frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx = -\frac{1}{3}x^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} -$

$- \frac{1}{2}\log\,(1+\sqrt{x}) - \mathrm{arctg}\,\sqrt[4]{x}.$

6) $\int \frac{x\,dx}{(5x+3)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{2}{25}\,\frac{5x+2}{(5x+3)^{\frac{3}{2}}}.$

7) $\int x\,\sqrt[3]{3x+7}\,dx = \left(\frac{1}{7}\,x - \frac{1}{4}\right)(3x+7)\,\sqrt[3]{3x+7}.$

III.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x+x^2}} = \log\left[x-2+\sqrt{3-4x+x^2}\right]$.

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x+2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left[2x-\frac{3}{2}+\right.$

$\left.+\sqrt{\left(2x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right]$.

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x-5x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{arc Sin} \frac{5x-2}{3}$.

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = \log\left(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}\right)$.

5) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = \sqrt{1+x+x^2} - \frac{1}{2}\log\left(1+2x+\right.$

$\left.+2\sqrt{1+x+x^2}\right)$.

6) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = \left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)\sqrt{1+x+x^2}$

$-\frac{1}{8}\log\left(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}\right)$.

7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} = \log\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x}$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\log\left(a+2bx+2\sqrt{b}\sqrt{ax+bx^2}\right)$.

Предполагая, что $b>0$.

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \text{arc Sin} \frac{2bx-a}{a} \qquad (b>0)$.

IV.

1) $\int \mathrm{Cos}^3 x dx = \mathrm{Sin}\, x - \frac{1}{3}\,\mathrm{Sin}^3 x = \frac{1}{12}\,\mathrm{Sin}\, 3x + \frac{3}{4}\,\mathrm{Sin}\, x.$

2) $\int \mathrm{Cos}^4 x dx = \frac{1}{32}\,\mathrm{Sin}\, 4x + \frac{1}{4}\,\mathrm{Sin}\, 2x + \frac{3}{8}\, x.$

3) $\int \mathrm{Sin}^3 x dx = -\mathrm{Cos}\, x + \frac{1}{3}\,\mathrm{Cos}^3 x =$

$= \frac{1}{12}\,\mathrm{Cos}\, 3x - \frac{3}{4}\,\mathrm{Cos}\, x.$

4) $\int \mathrm{Sin}^4 x dx = \frac{1}{32}\,\mathrm{Sin}\, 4x - \frac{1}{4}\,\mathrm{Sin}\, 2x + \frac{3}{8}\, x.$

5) $\int \frac{x dx}{\mathrm{Cos}^2 x} = x\,\mathrm{tg}\, x + \log \cos x.$

6) $\int \frac{x dx}{\mathrm{Sin}^2 x} = -x\,\mathrm{cotg}\, x + \log \mathrm{Sin}\, x.$

7) $\int e^{ax}\,\mathrm{Cos}\, bx\, dx = \frac{e^{ax}(b\,\mathrm{Sin}\, bx + a\,\mathrm{Cos}\, bx)}{a^2 + b^2}.$

8) $\int e^{ax}\,\mathrm{Sin}\, bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\,\mathrm{Sin}\, bx - b\,\mathrm{Cos}\, bx)}{a^2 + b^2}.$

9) $\int e^{ax}\,\mathrm{Cos}^2 x\, dx = \frac{e^{ax}\,\mathrm{Cos}\, x\,[2\,\mathrm{Sin}\, x + a\,\mathrm{Cos}\, x]}{4 + a^2} + \frac{2\,e^{ax}}{a\,(4 + a^2)}.$

10) $\int e^{ax}\,\mathrm{Sin}^2 x\, dx = \frac{e^{ax}\,\mathrm{Sin}\, x\,[a\,\mathrm{Sin}\, x - 2\,\mathrm{Cos}\, x]}{4 + a^2} + \frac{2\,e^{ax}}{a\,(4 + a^2)}.$

ГЛАВА XVII.

Интегрированіе нѣкоторыхъ простѣйшихъ дифференціальныхъ уравненій.

§ 121. Основной вопросъ интегральнаго исчисленія высказанъ въ § 90 слѣдующимъ образомъ: *по данному соотношенію между перемѣнною независимою, ея неизвѣстною функціею и производными этой функціи различныхъ порядковъ найти самую функцію.*

Въ предыдущихъ главахъ разсмотрѣнъ простѣйшій случай этого вопроса — нахожденіе функціи по данной ея производной, въ этой главѣ будетъ дано понятіе о рѣшеніи общаго вопроса въ нѣкоторыхъ простѣйшихъ частныхъ случаяхъ, наиболѣе часто встрѣчающихся въ приложеніяхъ.

Упомянутое выше соотношеніе между перемѣнною независимою, ея неизвѣстною функціею и производными этой функціи различныхъ порядковъ называется *обыкновеннымъ дифференціальнымъ уравненіемъ*, въ отличіе отъ дифференціальнаго уравненія съ *частными* производными, когда это соотношеніе заключаетъ не *одну* перемѣнную независимую, а нѣсколько и содержитъ частныя производныя неизвѣстной функціи по этимъ перемѣннымъ.

Мы будемъ имѣть дѣло только съ обыкновенными дифференціальными уравненіями, и для краткости рѣчи слово «обыкновенное» постоянно повторять не будемъ, а будемъ его подразумѣвать.

Дифференціальныя уравненія различаются по *порядкамъ* ихъ, причемъ порядкомъ дифференціальнаго уравненія называется порядокъ наивысшей производной, въ него входящей.

Такъ напр.:

$$y' - xy + x^2 = 0$$

есть дифференціальное уравненіе перваго порядка, а уравненіе

$$y'' + 3y' - 7y = \operatorname{Sin} x$$

есть дифференціальное уравненіе второго порядка.

Рѣшеніемъ *дифференціальнаго уравненія называется такое выраженіе неизвѣстной функціи, которое, будучи въ уравненіе вмѣсто этой функціи подставлено, обращаетъ его въ тожество*, или какъ говорятъ короче «уравненію удовлетворяетъ».

Такъ, напр., пусть дано уравненіе:

$$y'' + 4y = 0$$

очевидно, что выраженіе

$$y = \operatorname{Cos} 2x$$

этому уравненію удовлетворяетъ; точно также выраженіе

$$y = \operatorname{Sin} 2x$$

также удовлетворяетъ уравненію, значитъ, какъ $y = \operatorname{Cos} 2x$ такъ и $y = \operatorname{Sin} 2x$ суть рѣшенія предложеннаго уравненія.

Нетрудно убѣдиться, что и величины $y = 2 \operatorname{Cos} 2x$; $y = \frac{5}{7} \operatorname{Cos} 2x$; $y = 10 \operatorname{Cos} 2x$ и вообще $y = A \operatorname{Cos} 2x$, гдѣ A какая угодно постоянная, удовлетворяютъ предложенному уравненію.

Точно также выраженія $y = 2 \operatorname{Sin} 2x$; $y = \frac{3}{5} \operatorname{Sin} 2x$; $y = 15 \operatorname{Sin} 2x$ и вообще $y = B \operatorname{Sin} 2x$, гдѣ B есть какая угодно постоянная, также удовлетворяютъ этому уравненію.

Наконецъ, если мы возьмемъ:

$$y = \operatorname{Cos} 2x + \operatorname{Sin} 2x; \qquad y = 5 \operatorname{Cos} 2x + 7 \operatorname{Sin} 2x$$

и т. д. и вообще

$$y = A \operatorname{Cos} 2x + B \operatorname{Sin} 2x$$

то мы получимъ также рѣшенія нашего уравненія.

Этотъ примѣръ показываетъ, что данное уравненіе можетъ имѣть множество различныхъ рѣшеній.

Въ разсматриваемомъ примѣрѣ всѣ рѣшенія, которыя мы привели, могутъ быть получены, приписывая въ выраженіи

$$y = A \operatorname{Cos} 2x + B \operatorname{Sin} 2x$$

частныя значенія производнымъ постояннымъ A, B, и представляютъ, слѣдовательно, лишь частныя значенія этого общаго рѣшенія.

Мы увидимъ, что подобное обстоятельство имѣетъ мѣсто и для всякаго дифференціальнаго уравненія.

§ 122. Чтобы установить связь между дифференціальнымъ уравненіемъ и рѣшеніями его, а также и тѣ требованія, которыя можно къ этимъ рѣшеніямъ предъявлять, покажемъ аналитическое происхожденіе дифференціальныхъ уравненій.

Начнемъ съ простѣйшаго случая.

Положимъ, что задана нѣкоторая функція

$$y = f(x, C) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ C есть произвольная постоянная.

Приписывая въ этомъ уравненіи (1) произвольной постоянной C различныя частныя значенія, мы будемъ получать различныя функціи y, но такъ какъ всѣ эти функціи происходятъ отъ одной и той-же $f(x, C)$ то естественно является вопросъ, не обладаютъ ли всѣ эти функціи однимъ какимъ-либо общимъ свойствомъ, независимымъ отъ значенія постоянной C?

Чтобы найти аналитическое выраженіе этого общаго свойства, поступимъ такъ: возьмемъ отъ обѣихъ частей уравненія

(1) производную, получимъ новое уравненіе слѣдующаго вида:

$$y' = f'(x, C) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

это уравненіе вмѣстѣ съ предложеннымъ

$$y = f(x, C) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

представляетъ систему двухъ уравненій. Изъ этой системы можно букву C исключить и тогда останется одно уравненіе, которое будетъ заключать буквы: x, y и y' т. е. будетъ вида:

$$F(x, y, y') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3($$

и будетъ представлять собою нѣкоторое дифференціальное уравненіе перваго порядка. Это дифференціальное уравненіе и выражаетъ отличительное свойство функціи y, опредѣляемой конечнымъ уравненіемъ (1).

Такъ, напримѣръ, пусть

$$y = Cx^2 + x + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

тогда

$$y' = 2Cx + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

исключая изъ этихъ двухъ уравненій букву C получимъ:

$$2y - xy' - x - 2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Понятно, что это исключеніе можно выполнить различными способами, результатъ всегда будетъ одинъ и тотъ-же. Такъ можно уравненіе (2) рѣшить относительно буквы C; подставивъ найденную величину въ уравненіи (1), получимъ:

$$C = \frac{y' - 1}{2x}$$

$$y = \frac{1}{2}(y' - 1)x + x + 1$$

$$2y - xy' - x - 2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

жно бы было наоборотъ рѣшить уравненіе (1) отно-льно C и подставить въ уравненіи (2), тогда будетъ:

$$C = \frac{y-x-1}{x^2}$$

$$y' = 2(y - x - 1) \cdot \frac{1}{x} + 1$$

по упрощеніи даетъ тоже уравненіе (3).

Можно бы, напр. уравненіе (1) умножить на 2, уравне-же (2) на x и вычесть изъ перваго, тогда прямо получимъ авненіе (3).

Итакъ, въ нашемъ примѣрѣ мы имѣемъ конечное (т. е. не ержащее производныхъ) уравненіе

$$y = Cx^2 + x + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

дифференціальное

$$2y - xy' - x - 2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

торое произошло отъ исключенія произвольной постоянной C ъ уравненія (1) и уравненія (2), полученнаго изъ него диф-еренцированіемъ.

Нетрудно убѣдиться, что какое бы значеніе постоянной роизвольной C приписано ни было всегда величина

$$y = Cx^2 + x + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ъ рѣшеніемъ уравненія

$$2y - xy' - x - 2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Дѣйствительно изъ уравненія (1) слѣду

$$y' = 2Cx + 1 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

подставляя въ уравненіе (3) вмѣсто ихъ величины (1) и (2), получаемъ такое равенство:

$$2(Cx^2 + x + 1) - x(2Cx + 1) - x - 2 = 0$$

или иначе:

$$2Cx^2 + 2x + 2 - 2Cx^2 - x - x - 2 = 0.$$

Очевидно, что это есть тожество имѣющее мѣсто при *всякомъ* значеніи буквы C.

Значитъ выраженіе

$$y = Cx^2 + x + 1$$

при всякомъ значеніи буквы C есть рѣшеніе уравненія

$$2y - xy' - x - 2 = 0.$$

Совершенно также и въ общемъ случаѣ, когда дано конечное уравненіе

$$y = f(x, C) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и соотвѣтствующее ему дифференціальное уравненіе

$$F(x, y, y') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

то при всякомъ значеніи произвольной постоянной C величина y, опредѣляемая уравненіемъ (1), будетъ рѣшеніемъ уравненія (3).

Чтобы въ этомъ убѣдиться, стоитъ только вообразить, что исключеніе буквы C изъ уравненія (1) и уравненія

$$y' = f'(x, C) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

произведено такъ: уравненіе (2) рѣшено относительно буквы C и найденное рѣшеніе, которое будетъ вида

$$C = \varphi(x, y') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

подставлено въ уравненіе (1), которое тогда и принимаетъ видъ:

$$y = f[x, \varphi(x, y')] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

что мы для сокращенія письма обозначили такъ:

$$F(x, y, y') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Такъ какъ уравненіе (4) представляетъ собою рѣшеніе уравненія (2) и значитъ равносильно ему, то изъ этихъ двухъ уравненій слѣдуетъ такое тожество:

$$C = \varphi[x, f'(x, C)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Съ другой стороны подстановка въ уравненіе (5) или что тоже въ уравненіе (3) вмѣсто y его величины (1) даетъ:

$$f(x, C) = f[x, \varphi[x, f'(x, C]]$$

что въ силу тожества (6) представляетъ собою тожество:

$$f(x, C) = f(x, C)$$

а это и значитъ, что величина y, опредѣляемая уравненіемъ (1) есть *рѣшеніе* дифференціальнаго уравненія (3).

Конечное уравненіе (1) называется по отношенію къ происходящему изъ него дифференціальному уравненію (3) *общимъ интеграломъ*.

Въ предыдущемъ разсужденіи мы предположили, что функція y задана явно въ зависимости отъ x и произвольной постоянной C; не трудно видѣть, что наше разсужденіе по прежнему имѣетъ мѣсто, когда эта зависимость выражена уравненіемъ нерѣшеннымъ относительно y, т. е. уравненіемъ вида

$$\varphi(x, y, C) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1').$$

Если изъ этого уравненія и того, которое получается изъ него дифференцированіемъ, т. е.

$$\varphi_x' + \varphi_y' \cdot y' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

исключить произвольную постоянную C, то получится обыкновенное дифференціальное уравненіе перваго порядка, по отношенію къ которому конечное уравненіе (1′) есть *общій интегралъ*.

§ 123. Итакъ мы имѣемъ слѣдующее опредѣленіе: *Общимъ интеграломъ обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка, называется такое конечное уравненіе, содержащее одну произвольную постоянную C, неизвѣстную функцію y и перемѣнную независимую x, что исключеніе этой постоянной изъ этого уравненія и того, которое получается изъ него дифференцированіемъ, даетъ предложенное дифференціальное уравненіе.*

Затѣмъ мы показали, что *величина неизвѣстной функціи y, слѣдующая изъ общаго интеграла при всякомъ значеніи постоянной произвольной C, есть рѣшеніе предложеннаго дифференціальнаго уравненія.*

Возникаетъ такой вопросъ, всѣ-ли рѣшенія предложеннаго уравненія заключаются въ общемъ интегралѣ, т. е. могутъ быть

изъ него получены, придавая частныя значенія постоянной C. Оказывается, что нѣтъ, т. е., что существуютъ такія рѣшенія, которыя ни при какомъ постоянномъ (несодержащемъ буквы x значеніи) C изъ общаго интеграла получены быть не могутъ.

Изслѣдованіе этого вопроса въ нашъ курсъ не входитъ, почему мы и ограничимся лишь изложеніемъ способовъ нахожденія общаго интеграла нѣкоторыхъ простѣйшихъ типовъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка.

§ 124. Интегрированіе уравненія вида

$$f(x) + F(y) \cdot y' = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

[illegible]-часъ же приводится къ интегрированію функцій, стоитъ [illegible]ько замѣнить y' его величиною $\frac{dy}{dx}$ и освободить уравне- [illegible] отъ знаменателя dx, получится:

$$f(x) \cdot dx + F(y) \cdot dy = 0$$

[illegible]ѣчая, что

$$f(x)\,dx = d\int f(x)\,dx \quad \text{и} \quad F(y)dy = d\int F(y)\,dy$$

мы предыдущее уравненіе можемъ написать такъ:

$$d\left[\int f(x)\,dx + \int F(y)\,dy\right] = 0$$

что показываетъ, что дифференціалъ стоящаго въ скобкахъ выраженія равенъ нулю, слѣдовательно само это выраженіе равно постоянной.

Итакъ имѣемъ:

$$\int f(x)\,dx + \int F(y)\,dy = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Такимъ образомъ нахожденіе общаго интеграла предложеннаго уравненія приведено къ нахожденію интегралов:

$$\int f(x)\,dx \qquad \text{и} \qquad \int F(y)\,dy$$

которое было показано въ предыдущихъ главахъ.

Положимъ, что мы эти интегралы найдемъ, такъ что

$$\left.\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \varphi(x)\\ \int F(y)\,dy &= \psi(y)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

тогда общій интегралъ предложеннаго уравненія и будетъ

$$\varphi(x)+\psi(y) = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

При нахожденіи интегралов (3) нѣтъ надобности придавать къ выраженіямъ $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ по произвольной постоянной, такъ какъ если бы мы придали такія постоянныя напр. C_1 и C_2, то вмѣсто формулы (4) получили бы такую:

$$\varphi(x)+\psi(y) = C - C_1 - C_2$$

но очевидно, что алгебраическая сумма $C - C_1 - C_2$ трехъ постоянныхъ произвольныхъ есть тоже произвольная постоянная и ее можно, не утрачивая общности, обозначить одною буквою C.

Уравненіе вида:

$$f(x)+F(y)\cdot y' = 0$$

или, что тоже:

$$f(x)\cdot dx+F(y)\cdot dy = 0$$

называется уравненіемъ съ *отдѣленными перемѣнными.*

Такъ какъ интегрированіе такого уравненія приводится къ интегрированію функцій, то и другіе виды уравненій стараются привести къ такому виду, въ которомъ перемѣнныя отдѣлены.

Разсмотримъ простѣйшіе виды такихъ уравненій, гдѣ такое приведеніе удается выполнить.

Первый типъ такихъ уравненій суть уравненія слѣдующаго вида:

$$f(x) \cdot \varphi(y) + F(x) \cdot \psi(y) \cdot y' = 0$$

или иначе:

$$f(x) \,.\, \varphi(y) \,.\, dx + F(x) \,.\, \psi(y) \,.\, dy = 0$$

гдѣ $f(x)$, $\varphi(y)$, $F(x)$ и $\psi(y)$ суть заданныя функціи аргументовъ стоящихъ подъ ихъ знакомъ.

Стоитъ только раздѣлить предложенное уравненіе на

$$\varphi(y) \,.\, F(x)$$

и получится уравненіе:

$$\frac{f(x)}{F(x)}\,dx + \frac{\psi(y)}{\varphi(y)}\,dy = 0.$$

въ которомъ перемѣнныя отдѣлены и слѣдовательно общій интегралъ его будетъ вида:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx + \int \frac{\psi(y)}{\varphi(y)}\,dy = C.$$

Такъ напр.

$$y\,dx - x\,dy = 0$$

дѣлимъ на $x \cdot y$ получимъ:

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$$

откуда слѣдуетъ

$$\log x - \log y = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

или

$$\log \frac{x}{y} = C. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

т. е. что логариомъ отношенія $\frac{x}{y}$ есть постоянная, значитъ и само это отношеніе постоянное, т. е. можно писать:

$$\frac{x}{y} = C_1$$

откуда

$$x = C_1 y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

или

$$y = \frac{1}{C_1} x$$

вмѣсто постоянной $\frac{1}{C_1}$ можно писать просто C_2, разумѣя подъ C_2 произвольную постоянную.

Итакъ:

$$y = C_2 x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Въ этомъ примѣрѣ общій интегралъ нарочно написанъ въ различной формѣ, но всѣ эти виды его равнозначны между собою.

Примѣры. Найти общіе интегралы слѣдующихъ уравненій:

1) $(1+x)\,y\,dx + (1-y)\,x \cdot dy = 0$

2) $(y^2 + xy^2)\,dx + (x^2 - yx^2)\,dy = 0$

3) $xy(1+x^2)\,dy - (1+y^2)\,dx = 0$

4) $(1+y^2)\,dx - (y+\sqrt{1+y^2})\,(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot dy = 0$

5) $\mathrm{Sin}\,x \cdot \mathrm{Cos}\,y \cdot dx - \mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,y \cdot dy = 0$

6) $\mathrm{Sec}^2 x\ \mathrm{tg}\,y \cdot dx + \mathrm{Sec}^2 y\ \mathrm{tg}\,x\,dy = 0$

§ 125. Второй типъ уравненій, которыя легко приводятся къ такому, гдѣ перемѣнныя отдѣлены, суть такъ называемыя *однородныя дифференціальныя уравненія.*

Однороднымъ дифференціальнымъ уравненіемъ называется такое уравненіе вида:

$$f(x, y) \cdot dx + F(x, y) \cdot dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

въ которомъ, функціи $f(x, y)$ и $F(x, y)$ однородны относительно буквъ x и y и притомъ одной и той-же степени.

Такъ, напримѣръ, уравненіе:

$$(x^2 - y^2)\, dy - 2xy \cdot dx = 0$$

родное ибо оба множителя, какъ при dy, такъ и при dx ставляютъ собою однородныя функціи второй степени отъ ъ x и y.

Для интегрированія этого уравненія раздѣлимъ его на x^2 учимъ:

$$\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dy - 2\frac{y}{x} \cdot dx = 0$$

положимъ

$$\frac{y}{x} = t$$

иначе

$$y = t \cdot x$$

откуда слѣдуетъ

$$dy = t dx + x dt$$

по подстановкѣ имѣемъ:

$$(1 - t^2)\,(t dx + x dt) - 2t \cdot dx$$

или собравъ члены содержащіе dx и dt, получимъ уравненіе:

$$x(1 - t^2)\, dt - t(1 + t^2) \cdot dx = 0$$

въ которомъ перемѣнныя отдѣляются, и которое по раздѣленіи на

$$x \,.\, t(1+t^2)$$

принимаетъ видъ:

$$\frac{1-t^2}{t(1+t^2)}\,dt - \frac{dx}{x} = 0.$$

Замѣтивъ, что

$$\frac{1-t^2}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{2t}{1+t^2}$$

по интегрированіи имѣемъ:

$$\log t - \log(1+t^2) - \log x = C_1$$

или

$$\log \frac{t}{x(1+t^2)} = C_1$$

значитъ и

$$\frac{t}{x(1+t^2)} = C$$

откуда:

$$\frac{t}{1+t^2} = Cx$$

и подставляя вмѣсто t его величину $\frac{y}{x}$ по упрощеніи получимъ:

$$x^2+y^2 = \frac{1}{C}\,.\,y.$$

Совершенно подобно поступимъ и въ общемъ случаѣ. Положимъ, что функціи $f(x, y)$ и $F(x, y)$ въ уравненіи

$$f(x, y)\,dx + F(x, y)\,dy = 0$$

обѣ однородныя одного и того-же измѣренія n. Слѣдовательно каждая изъ этихъ функцій можетъ быть представлена въ такомъ видѣ:

$$x^n f\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad \text{и} \quad x^n F\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

или обозначая $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ черезъ $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ и $F\left(1, \frac{y}{x}\right)$ черезъ $\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ можемъ написать предложенное уравненіе по раздѣленіи его на x^n, въ такомъ видѣ:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

полагая теперь

$$\frac{y}{x} = t$$

или, что тоже

$$y = tx$$

и значитъ:

$$dy = tdx + xdt$$

получимъ:

$$[\varphi(t) + t \,.\, \psi(t)]\, dx + \psi(t) \,.\, x \,.\, dt = 0$$

т. е. уравненіе, въ которомъ перемѣнныя отдѣляются, и которое по раздѣленіи на

$$x \,.\, [\varphi(t) + t\psi(t)]$$

принимаетъ видъ:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(t) \,.\, dt}{\varphi(t) + t\psi(t)} = 0$$

и интегрированіе его даетъ:

$$\log x + \int \frac{\psi(t) \,.\, dt}{\varphi(t) + t\psi(t)} = C.$$

Выполнивъ указанное интегрированіе, надо замѣнить перемѣнную t его величиною

$$t = \frac{y}{x}.$$

Задача. Показать, что однородное уравненіе приводится къ такому, гдѣ перемѣнныя отдѣляются, если сдѣлать

$$x = \rho \operatorname{Cos} \theta \quad \text{и} \quad y = \rho \operatorname{Sin} \theta$$

и считать ρ новою неизвѣстною функціей и θ новою перемѣнною независимой.

Примѣры. Интегрировать уравненіе:

$$(y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx - x\,dy = 0$$

по раздѣленіи на x имѣемъ:

$$\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)dx - dy = 0.$$

Дѣлая

$$\frac{y}{x} = t$$

или

$$y = tx$$

и

$$dy = t\,dx + x\,dt$$

получаемъ:

$$(t+\sqrt{1+t^2})\,dx - (t\,dx + x\,dt) = 0$$

или

$$\sqrt{1+t^2}\cdot dx - x\,dt = 0.$$

Откуда:

$$\frac{dx}{x} - \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = 0$$

по интегрированіи получаемъ:

$$\log x - \log\,(t+\sqrt{1+t^2}) = C_1$$

или

$$\log \frac{x}{t+\sqrt{1+t^2}} = C_1.$$

Иначе:

$$x = (t+\sqrt{1+t^2})\cdot C$$

гдѣ

$$C_1 = \log C$$

или

$$x = \left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right) C$$

или по упрощеніи и освобожденіи отъ радикала:

$$x^2 = 2Cy + C^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Положимъ, что мы желаемъ повѣрить полученное рѣшеніе, тогда надо это уравненіе продифференцировать, что даетъ

$$x = C \cdot y' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

и изъ этого уравненія и уравненія (1) исключить букву C, для чего рѣшаемъ уравненіе (2) относительно C и подставляемъ въ уравненіе (1) имѣемъ:

$$C = \frac{x}{y'}$$

и затѣмъ:

$$x^2 = \frac{2xy}{y'} + \frac{x^2}{y'^2}$$

или иначе:

$$xy'^2 - 2yy' - x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

т. е. уравненіе по виду отличное отъ предложеннаго, но если обратить вниманіе, что уравненіе (3) можно написать такъ:

$$(x^2y'^2 - 2yy' + y^2) - (x^2 + y^2) = 0$$

или

$$(xy'y + \sqrt{x^2 + y^2})(xy'y - \sqrt{x^2 + y^2}) = 0$$

то мы видимъ, что уравненіе (3) распадается на два слѣдующихъ:

$$xy' - y + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

и

$$xy' - y - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

изъ которыхъ второе и есть предложенное. Первое-же имѣетъ съ нимъ одинъ и тотъ-же общій интегралъ (1).

Примѣры. Интегрировать уравненія:

1) $(x^2 y + y^3)\,dx = 3xy^2\,dy$

2) $y^2\,dx + (xy + x^2)\,dy = 0$

3) $x\,dx + y\,dy = a(x\,dy - y\,dx)$

4) $y^2\,dx + x^2\,dy = xy\,dy$

5) $y^3\,dy + 3y^2 x\,dx + 2x^3\,dx = 0$

6) $x^2 y\,dx - y^3\,dy = x^3\,dy.$

§ 126. Въ заключеніе этой главы приведемъ еще одинъ типъ уравненій, интегрированіе которыхъ также приводится къ интегрированію функцій одной перемѣнной.

Это суть уравненія слѣдующаго вида:

$$y' + P \cdot y = Q$$

гдѣ P и Q суть функціи только буквы x. Такое уравненіе называется *линейнымъ*.

Сдѣлаемъ въ этомъ уравненіи

$$y = X \cdot z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

причемъ черезъ X обозначена нѣкоторая функція отъ x, намъ пока неизвѣстная, и которой мы можемъ распорядиться такъ, какъ намъ понадобится.

Дифференцируя равенство (2) и подставляя въ уравненіе (1) полученный результатъ:

$$y' = zX' + Xz'$$

найдемъ:

$$zX' + Xz' + P \cdot X \cdot z - Q = 0.$$

Очевидно, что опредѣливъ функцію X такъ чтобы было:

$$zX' + PX \cdot z = 0$$

или иначе:

$$X' + PX = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

мы для опредѣленія z получимъ уравненіе:

$$Xz' - Q = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

и въ томъ и въ другомъ изъ уравненій (3) и (4) перемѣнныя отдѣляются и мы имѣемъ:

$$\frac{X'}{X} = - P$$

откуда

$$\log X = - \int P dx$$

значитъ

$$X = e^{-\int P dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Затѣмъ уравненіе (4) даетъ:

$$z' = Q \cdot e^{\int P dx}$$

откуда слѣдуетъ:

$$z = C + \int Q \cdot e^{\int P dx} \cdot dx$$

и слѣдовательно:

$$y = e^{-\int Pdx}\left[C + \int Q \cdot e^{\int Pdx} \cdot dx\right] . \quad .$$

Замѣтимъ, что при нахожденіи величины X мы къ интегралу $\int Pdx$ не прибавляли произвольной постоянной, и какъ легко видѣть, эта постоянная въ окончательномъ результатѣ (форм. 6) все равно пропадаетъ.

Итакъ мы имѣемъ слѣдующую теорему: *Общій интегралъ линейнаго дифференціальнаго уравненія*

$$y' + Py = Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

въ которомъ P и Q какія угодно заданныя функціи перемѣнной независимой x, представляется слѣдующей формулой:

$$y = e^{-\int Pdx}\left[C + \int Q \cdot e^{\int Pdx} \cdot dx\right] . \quad . \quad . \quad (II).$$

Примѣры. Интегрировать уравненіе:

$$y' + y = ax$$

здѣсь очевидно

$$P = 1 \quad \text{и} \quad Q = ax$$

слѣдовательно

$$\int Pdx = \int dx = x$$

значитъ

$$e^{\int Pdx} = e^{x}$$

$$\int Q \cdot e^{\int Pdx} = a\int x \cdot e^{x} \cdot dx = a\left[e^{x} \cdot x - e^{x}\right] = a \cdot e^{x}(x - 1)$$

слѣдовательно

$$y = e^{-x}\{C + ae^{x}(x - 1)\} = Ce^{-x} + ax - a.$$

2-й примѣръ. Интегрировать уравненіе:

$$y' + \frac{x}{1+x^2}\, y = \frac{1}{x.(1+x^2)}$$

здѣсь

$$P = \frac{x}{1+x^2} \quad \text{и} \quad Q = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

значитъ:

$$\int P dx = \int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \log (1+x^2) = \log \sqrt{1+x^2}$$

слѣдовательно

$$e^{\int P dx} = \sqrt{1+x^2}$$

затѣмъ:

$$\int Q \cdot e^{\int P dx} dx = \int \frac{dx}{x.(1+x^2)} \cdot \sqrt{1+x^2} = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{dx}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\log \left(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \log \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

слѣдовательно:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left\{ C + \log \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \right\}$$

Примѣры:

Интегрировать уравненія:

1) $x(1-x^2)\, y' + (2x^2 - 1)\, y = ax^3.$

2) $y' + y \cdot \operatorname{Cos} x = \frac{1}{2} \operatorname{Sin} 2x.$

3) $y \cdot y' + cy^2 = a \operatorname{Cos}(x+\beta)$

(положить $y^2 = 2z$).

4) $(1-x^2)y' + xy = a.$

5) $2xy' - y = \frac{3}{2}x^2.$

6) $y' + \frac{1}{x}y = 2.$

7) $y' + my = n.$

8) $y' + ay = m + nx + px^2.$

9) $y' + ay = be^{mx}.$

10) $y' - \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = a\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$

§ 127. Дадимъ въ заключеніе этой главы нѣсколько примѣровъ такихъ геометрическихъ вопросовъ, которые приводятъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ перваго порядка.

Такъ какъ дифференціальное уравненіе перваго порядка представляетъ собою нѣкоторую зависимость между величинами x, y и y', то если принять x и y за координаты точки на плоскости и разсматривать y какъ функцію отъ x, то совокупность такихъ точекъ представитъ нѣкоторую кривую, y' — какъ мы видѣли есть угловой коэффиціентъ касательной къ этой кривой въ точкѣ коей координаты суть x и y.

Такимъ образомъ дифференціальное уравненіе будетъ выражать нѣкоторое свойство принадлежащее касательной къ этой кривой въ любой ея точкѣ.

Значитъ и обратно, когда мы пожелаемъ найти такую кривую, касательная или нормаль которой обладали бы нѣкоторымъ отличительнымъ свойствомъ, то мы придемъ къ диф-

ференціальному уравненію перваго порядка. Проинтегрировавъ это уравненіе мы и найдемъ требуемую кривую.

Возьмемъ нѣкоторые простѣйшіе примѣры.

Примѣръ 1-й. Найти такую кривую, нормаль къ которой проведенная въ любой ея точкѣ проходила бы черезъ данную на плоскости точку координаты коей суть a и b.

Пусть точка M координаты коей суть x, y принадлежатъ искомой кривой.

Уравненіе нормали къ кривой въ этой точкѣ есть:

$$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Такъ какъ по предположенію эта нормаль должна проходить черезъ точку (a, b), то координаты этой точки должны удовлетворять уравненію (1) будучи подставлены вмѣсто перемѣнныхъ η, ξ представляющихъ текущія координаты разсматриваемой нормали.

Такимъ образомъ имѣемъ дифференціальное уравненіе:

$$(b - y) = -\frac{1}{y'}(a - x)$$

или

$$(b - y)y' + (a - x) = 0.$$

Умноживъ на dx имѣемъ уравненіе въ которомъ перемѣнныя отдѣлены и которое интегрируется непосредственно, и даетъ:

$$(y - b)^2 + (x - a)^2 = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Это уравненіе показываетъ, что искомая кривая есть кругъ, произвольнаго радіуса, но центръ котораго лежитъ въ данной точкѣ.

Примѣръ 2-й. Найти такую кривую касательная къ которой въ произвольной ея точкѣ (x, y) пересѣкала бы ось $x^{ов}$ въ такой точкѣ, абсцисса коей равна $\frac{1}{2}(x + a)$.

Нетрудно видѣть, что дифференціальное уравненіе искомой кривой есть:

$$x - \frac{y}{y'} = \frac{1}{2}(x+a)$$

или иначе:

$$\frac{1}{2}(x-a)\cdot y' - y = 0$$

или по умноженіи на dx и отдѣленіи перемѣнныхъ:

$$\frac{dy}{y} - 2\frac{dx}{x-a} = 0.$$

Общій интегралъ этого уравненія можетъ быть представленъ въ такомъ видѣ:

$$y = C(x-a)^2$$

которое показываетъ, что искомая кривая есть парабола.

ГЛАВА XVIII.

Интегрированіе нѣкоторыхъ простѣйшихъ уравненій втораго и высшихъ порядковъ.

§ 128. Разсмотримъ сперва аналитическое происхожденіе уравненій высшихъ порядковъ.

Положимъ, что дана конечная зависимость

$$y = f(x, C_1, C_2, C_3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

заключающая три произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, C_3 (разсужденіе останется безъ измѣненія и въ томъ случаѣ, когда такихъ постоянныхъ не три, а любое число n). Совершенно подобно тому какъ мы поступали въ случаѣ одной постоянной

произвольной, продифференцируемъ уравненіе (1) три раза подъ рядъ — получимъ слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned} y' &= f'(x,\ C_1,\ C_2,\ C_3) \\ y'' &= f''(x,\ C_1,\ C_2,\ C_3) \\ y''' &= f'''(x,\ C_1,\ C_2,\ C_3) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

исключивъ изъ этихъ уравненій и уравненія (1) произвольныя постоянныя C_1, C_2, C_3 мы получимъ одно уравненіе содержащее величины: x, y, y', y'', y''' т. е. уравненіе вида:

$$\varphi(x,\ y,\ y',\ y'',\ y''') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Это будетъ дифференціальное уравненіе *третьяго* порядка, по отношенію къ которому конечное уравненіе (1) есть *общій интегралъ*.

Совершенно также, какъ для уравненій перваго порядка можно показать, что при всякомъ значеніи постоянныхъ произвольныхъ величина y опредѣляемая уравненіемъ (1) есть рѣшеніе уравненія (3).

Такимъ образомъ мы выскажемъ слѣдующее опредѣленіе: *общимъ интеграломъ дифференціальнаго уравненія порядка n, называется такое конечное уравненіе содержащее неизвѣстную функцію y, перемѣнную независимую x и n произвольныхъ постоянныхъ; исключеніе которыхъ изъ этого уравненія и n уравненій получаемыхъ изъ него дифференцированіемъ даетъ предложенное дифференціальное уравненіе.*

По поводу этого опредѣленія необходимо замѣтить, что для сказаннаго исключенія могутъ понадобиться не всѣ n уравненій системы (2) но *необходимо*, чтобы этого исключенія нельзя было выполнить не воспользовавшись послѣднимъ изъ уравненій этой системы содержащимъ $y^{(n)}$.

Мы покажемъ, какъ находятся общіе интегралы нѣкоторыхъ простѣйшихъ уравненій втораго порядка.

§ 129. Возьмемъ во первыхъ уравненіе

$$y'' + n^2 y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Умноживъ это уравненіе на

$$y' dx = dy$$

получимъ:

$$y'' \cdot y' dx + n^2 y dy = 0$$

положимъ

$$y' = z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

тогда очевидно, что

$$y'' dx = dz$$

и наше уравненіе можно написать такъ:

$$z dz + n^2 y dy = 0$$

въ этомъ уравненіи перемѣнныя отдѣлены и интегрированіе его даетъ:

$$z^2 + n^2 y^2 = A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

гдѣ черезъ A обозначена произвольная постоянная.

Отсюда слѣдуетъ:

$$z = \sqrt{A - n^2 y^2}$$

или замѣнивъ z его величиною изъ уравненія (*)

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{A - n^2 y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b).$$

Отдѣляя перемѣнныя имѣемъ:

$$\frac{dy}{\sqrt{A - n^2 y^2}} = dx.$$

Откуда слѣдуетъ:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{A - n^2 y^2}} = x + B$$

гдѣ черезъ B обозначена также произвольная постоянная.

Но

$$\int \frac{dy}{\sqrt{A - n^2 y^2}} = \frac{1}{n} \int \frac{d\left(\frac{ny}{\sqrt{A}}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{ny}{\sqrt{A}}\right)^2}} = \frac{1}{n} \operatorname{arc\,Sin}\left(\frac{ny}{\sqrt{A}}\right).$$

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\frac{1}{n} \operatorname{arc\,Sin}\left(\frac{ny}{\sqrt{A}}\right) = x + B$$

или

$$\operatorname{arc\,Sin}\left(\frac{ny}{\sqrt{A}}\right) = nx + nB$$

значитъ:

$$\frac{ny}{\sqrt{A}} = \operatorname{Sin}\,(nx + nB)$$

иначе

$$y = \frac{\sqrt{A}}{n} \operatorname{Sin}\,(nx + nB) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (**)$$

$$= \frac{\sqrt{A}}{n} \operatorname{Sin} nB \cdot \operatorname{Sin} nx + \frac{\sqrt{A}}{n} \operatorname{Cos} nB \cdot \operatorname{Cos} nx.$$

Такъ какъ A и B суть произвольныя постоянныя, то и величины:

$$\frac{\sqrt{A}}{n} \cdot \operatorname{Sin} nB \qquad \text{и} \qquad \frac{\sqrt{A}}{n} \cdot \operatorname{Cos} nB$$

суть также произвольныя постоянныя и каждую изъ нихъ можно обозначить одною буквою, напримѣръ, положить:

$$\frac{\sqrt{A}}{n} \cdot \operatorname{Sin} nB = C_1$$

$$\frac{\sqrt{A}}{n} \cdot \operatorname{Cos} nB = C_2$$

тогда y напишемъ такъ

$$y = C_1 \operatorname{Sin} nx + C_2 \operatorname{Cos} nx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Уравненія вида:

$$y'' + n^2 y = 0$$

встрѣчаются во множествѣ прикладныхъ вопросовъ, поэтому мы сформулируемъ полученный результатъ въ видѣ слѣдующей теоремы:

Теорема: *Общій интегралъ уравненія*

$$y'' + n^2 y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

есть

$$y = C_1 \operatorname{Sin} nx + C_2 \operatorname{Cos} nx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Этотъ результатъ нетрудно провѣрить. Въ самомъ дѣлѣ составляемъ производныя:

$$\begin{aligned} y' &= \quad n C_1 \operatorname{Cos} nx - n C_2 \operatorname{Sin} nx. \\ y'' &= -n^2 C_1 \operatorname{Sin} nx - n^2 C_2 \operatorname{Cos} nx. \\ &= -n^2 (C_1 \operatorname{Sin} nx + C_2 \operatorname{Cos} x). \end{aligned}$$

Для исключенія постоянныхъ произвольныхъ стоитъ только въ это послѣднее уравненіе подставить вмѣсто стоящей въ скобкахъ величины ея величину y слѣдующую изъ (2) и получится предложенное уравненіе (1).

Такъ напримѣръ, общій интегралъ уравненія:

$$y'' + y = 0$$

есть

$$y = C_1 \operatorname{Sin} x + C_2 \operatorname{Cos} x.$$

Для уравненія

$$y'' + 5y = 0$$

общій интегралъ, есть

$$y = C_1 \operatorname{Sin} \sqrt{5}\, x + C_2 \operatorname{Cos} \sqrt{5}\, x.$$

Замѣтимъ, что общій интегралъ предложеннаго уравненія

$$y'' + n^2 y = 0$$

можно писать и въ другой формѣ—стоитъ только взять формулу (**) и обратить вниманіе на то, что

$$\frac{\sqrt{A}}{n} \quad \text{и} \quad nB$$

при произвольныхъ A и B суть также произвольныя постоянныя, поэтому обозначивъ $\frac{\sqrt{A}}{n}$ черезъ C и nB черезъ α можемъ писать

$$y = C \operatorname{Sin} (nx + \alpha)$$

причемъ произвольныя постоянныя суть C и α.

§ 130. Возьмемъ теперь уравненіе:

$$y'' - n^2 y = 0 \ldots\ldots (1).$$

Поступая совершенно подобно предыдущему, получимъ вмѣсто уравненія (b) § 129, уравненіе:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{A + n^2 y^2}.$$

Откуда слѣдуетъ:

$$\frac{dy}{\sqrt{A + n^2 y^2}} = dx$$

и по интегрированіи:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{A+n^2y^2}} = x + B$$

но

$$\int \frac{dy}{\sqrt{A+n^2y^2}} = \frac{1}{n}\int \frac{d(ny)}{\sqrt{A+n^2y^2}} = \frac{1}{n}\log\left(ny+\sqrt{A+n^2y^2}\right)$$

значитъ:

$$\log\left(ny+\sqrt{A+n^2y^2}\right) = nx + nB$$

или

$$ny+\sqrt{A+n^2y^2} = e^{nB}\cdot e^{nx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

такъ какъ B есть произвольная постоянная, то и e^{nB} есть постоянная произвольная; обозначимъ ее для краткости черезъ C, тогда формула (*) напишется такъ:

$$ny+\sqrt{A+n^2y^2} = C\cdot e^{nx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (**).$$

Хотя это уравненіе и можно принять за общій интегралъ предложеннаго уравненія, но ему слѣдуетъ придать болѣе простой видъ, рѣшивъ уравненіе (**) относительно y.

Чтобы получить такое рѣшеніе, замѣтимъ, что

$$\left(ny+\sqrt{A+n^2y^2}\right)\left(\sqrt{A+n^2y^2}-ny\right) = A$$

слѣдовательно:

$$\sqrt{A+n^2y^2}-ny = \frac{A}{ny+\sqrt{A+n^2y^2}}$$

или въ силу уравненія (**):

$$\sqrt{A+n^2y^2}-ny = \frac{A}{C}\cdot e^{-nx} \quad . \quad . \quad . \quad (***).$$

Изъ уравненій (**) и (***) непосредственно слѣдуетъ:

$$y = \frac{C}{2n} e^{-nx} - \frac{A}{2nC} e^{nx}$$

такъ какъ C и A произвольныя постоянныя, то и величины $\frac{C}{2n}$ и $\frac{A}{2nC}$ тоже произвольныя постоянныя; обозначая ихъ черезъ C_1 и C_2 имѣемъ окончательно:

$$y = C_1 e^{-nx} + C_2 e^{nx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Такимъ образомъ мы получили слѣдующую теорему: *Общій интегралъ уравненія*

$$y'' - n^2 y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

есть

$$y = C_1 e^{-nx} + C_2 e^{nx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Такъ напримѣръ, для уравненія:

$$y'' - y = 0$$

общій интегралъ:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$$

или для уравненія:

$$y'' - 3y = 0$$

общій интегралъ:

$$y = C_1 e^{-\sqrt{3}x} + C_2 e^{+\sqrt{3}x}.$$

§ 131. Разсмотримъ теперь уравненія вида:

$$y'' + 2hy' + ky = 0$$

причемъ h и k два какихъ угодно постоянныхъ численныхъ коэффиціента. Это уравненіе не трудно привести къ одному изъ двухъ видовъ, разсмотрѣнныхъ выше.

Въ самомъ дѣлѣ положимъ

$$y = e^{-hx} \cdot z$$

причемъ z есть новая неизвѣстная функція; тогда

$$y' = e^{-hx}(z' - hz)$$
$$y'' = e^{-hx}(z'' - 2hz' + h^2 z)$$

и послѣ подстановки предложенное уравненіе приметъ видъ:

$$e^{-hx}[(z'' - 2hz' + h^2 z) + 2h(z' - hz) + kz] = 0$$

или

$$z'' + (k - h^2)z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)}.$$

Въ томъ случаѣ, когда

$$k - h^2 > 0$$

то можно положить

$$k - h^2 = n^2$$

и общій интегралъ уравненія (a) будетъ

$$z = C_1 \operatorname{Sin} nx + C_2 \operatorname{Cos} nx$$

и слѣдовательно

$$y = e^{-hx}\{C_1 \operatorname{Sin} nx + C_2 \operatorname{Cos} nx\}$$

причемъ

$$n = \sqrt{k - h^2}.$$

Въ томъ-же случаѣ, когда

$$k - h^2 < 0$$

то можно положить

$$k - h^2 = -p^2$$

и значитъ будетъ

$$z = C_1 e^{-pz} + C_2 e^{pz}$$

а слѣдовательно

$$y = C_1 e^{-(h+p)x} + C_2 e^{(p-h)x}$$

причемъ

$$p = \sqrt{h^2 - k}.$$

Наконецъ если-бы оказалось

$$k - h^2 = 0$$

то уравненіе (а) приняло бы видъ

$$z'' = 0.$$

Откуда слѣдуетъ

$$z' = C_1$$

а отсюда по интегрированіи

$$z = C_1 x + C_2$$

значитъ

$$y = e^{-hx}(C_1 x + C_2).$$

Такимъ образомъ имѣемъ слѣдующую теорему: *Общій интегралъ уравненія*

$$y'' + 2hy' + ky = 0$$

выражается слѣдующимъ образомъ:

1) $$y = e^{-hx}\{C_1 \operatorname{Sin} nx + C_2 \operatorname{Cos} nx\}$$

гдѣ

$$n = \sqrt{k - h^2}$$

когда $k - h^2 > 0.$

2) $y = e^{-hx}\{C_1 e^{-px} + C_2 e^{px}\}$

гдѣ

$$p = \sqrt{h^2 - k}$$

когда $k - h^2 < 0.$

3) $y = e^{-hx}\{C_1 x + C_2\}$

когда

$$k - h^2 = 0.$$

Примѣры:

1) $y'' + 2y' + 3y = 0$

здѣсь

$$h = 1; \qquad k = 3$$

$$k - h^2 = 3 - 1 = 2$$

значитъ

$$n = \sqrt{2}$$

и общій интегралъ есть:

$$y = e^{-x}\{C_1 \operatorname{Sin} \sqrt{2}\, x + C_2 \operatorname{Cos} \sqrt{2}\, x\}.$$

2) $y'' + 5y' - 7y = 0.$

Здѣсь $2h = 5$, значитъ $h = \frac{5}{2}$; $k = -7$

$$k - h^2 = -7 - \frac{25}{4} = -\frac{53}{4}$$

$$p^2 = \frac{53}{4}; \quad p = \frac{\sqrt{53}}{2}$$

и общій интегралъ есть:

$$y = e^{-\frac{5}{2}x}\left\{C_1 e^{-\frac{\sqrt{53}}{2}x} + C_2 e^{+\frac{\sqrt{53}}{2}x}\right\}.$$

3) $y'' + 4y' + 4y = 0.$

Здѣсь

$$h = 2 \qquad k = 4$$

$$k - h^2 = 0$$

и общій интегралъ:

$$y = e^{-2x}\{C_1 x + C_2\}.$$

Примѣры. Найти общіе интегралы слѣдующихъ уравненій:

1) $y'' + 5y' - 6y = 0.$

2) $y'' - 5y' + 6y = 0.$

3) $y'' + y' - y = 0.$

4) $y'' + y' + y = 0.$

5) $y'' - y' - y = 0.$

6) $y'' + 2y' + y = 0.$

7) $y'' - 2y' + y = 0.$

§ 132. Уравненія

$$y'' + n^2 y = 0$$

и

$$y'' + 2hy' + ky = 0$$

при $k > 0$ представляютъ уравненія движенія для малыхъ колебаній простого маятника, или магнита, или стрѣлки гальванометра или корабля на тихой водѣ и т. под. первое когда пренебрегаютъ сопротивленіемъ среды, второе когда разсматриваемыя колебанія совершаются въ средѣ оказывающей сопротивленіе, пропорціональное первой степени скорости.

Въ подобнаго рода механическихъ вопросахъ задаются такъ называемыя начальныя условія, т. е. тѣ значенія, которыя должно принимать само y и его первая производная y' когда $x = 0$. Эти условія даютъ возможность опредѣлить такія частныя значенія входящихъ въ общій интегралъ постоянныхъ произвольныхъ, при которыхъ y удовлетворяетъ какъ дифференціальному уравненію, такъ и начальнымъ условіямъ.

Пусть напр., надо интегрировать уравненіе:

$$y'' + n^2 y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

при условіяхъ: чтобы когда $x = 0$, то $y = A$ и $y' = 0$.

Мы видѣли, что общій интегралъ уравненія (1) есть:

$$y = C_1 \operatorname{Sin} nx + C_2 \operatorname{Cos} nx.$$

Чтобы эта величина удовлетворяла не только уравненію (1), что имѣетъ мѣсто при всякихъ значеніяхъ C_1 и C_2, но и условіямъ необходимо опредѣлить C_1 и C_2 такъ, чтобы было:

$$A = C_1 \cdot \operatorname{Sin} 0 + C_2 \operatorname{Cos} 0$$

и

$$0 = n C_1 \operatorname{Cos} 0 - n C_2 \operatorname{Sin} 0$$

такъ какъ

$$\operatorname{Cos} 0 = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{Sin} 0 = 0$$

то будетъ:

$$C_1 = 0 \quad \text{и} \quad C_2 = A$$

и значитъ искомая величина y есть:

$$y = A \operatorname{Cos} nx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Въ механическихъ вопросахъ перемѣнною независимою обыкновенно является время, его по большей части обозначаютъ буквою t, а въ предыдущее уравненіе вмѣсто величины n вводятъ величину τ, связанную съ n такимъ соотношеніемъ:

$$n = \frac{2\pi}{\tau} \quad \text{или} \quad \tau = \frac{2\pi}{n}$$

тогда уравненіе 2 принимаетъ видъ:

$$y = A \operatorname{Cos} \frac{2\pi t}{\tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Это уравненіе показываетъ, что величина y измѣняется слѣдующимъ образомъ:

При $t = 0$ $\qquad y = A$

При $t = \frac{\tau}{4}$ $\qquad y = 0$

При $t = \frac{\tau}{2}$ $\qquad y = -A$

При $t = \frac{3\tau}{4}$ $\qquad y = 0$

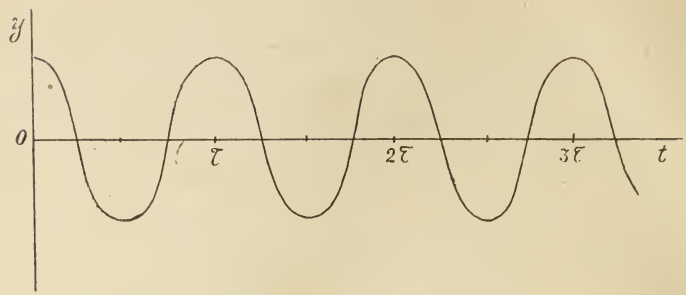
При $t = \tau$ $\qquad y = A$

и т. д. . . .

т. е. y колеблется между значеніями $+A$ и $-A$, принимая тѣ же самыя значенія черезъ промежутки времени равные τ. Величину A — называютъ амплитудою колебаній, τ — періодомъ ихъ. Какъ видно для такихъ колебаній амплитуда остается постоянной.

Графически законъ измѣненія y въ зависимости отъ t можетъ быть представленъ такимъ чертежемъ (черт. 33):

Черт. 33.



§ 133. Изслѣдуемъ теперь общій интегралъ уравненія:

$$y'' + 2hy' + ky = 0$$

причемъ $k > 0$, какъ это всегда имѣетъ мѣсто для всѣхъ прикладныхъ вопросовъ, чтобы это обстоятельство сдѣлать очевиднымъ положимъ $k = m^2$ и будемъ разсматривать уравненіе:

$$y'' + 2hy' + m^2 y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

причемъ перемѣнную независимую обозначимъ черезъ t, и будемъ искать такую величину y, которая удовлетворяя дифференціальному уравненію вмѣстѣ съ тѣмъ удовлетворяла-бы и такимъ начальнымъ условіямъ:

при $t = 0$ должно быть: $y = A$ и $y' = 0$.

Въ § 131 показано, что общій интегралъ разсматриваемаго уравненія имѣетъ различный видъ въ зависимости отъ того, положительное, отрицательное или равно нулю количество $k - h^2$, т. е. въ нашемъ примѣрѣ

$$m^2 - h^2.$$

1-й случай

$$m^2 - h^2 > 0.$$

Положивъ

$$m^2 - h^2 = p^2$$

мы получимъ общій интегралъ въ такой формѣ:

$$y = e^{-ht}\{C_1 \operatorname{Sin} pt + C_2 \operatorname{Cos} pt\} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Чтобы воспользоваться начальными условіями для опредѣленія произвольныхъ постоянныхъ, составляемъ выраженіе y', имѣемъ:

$$y' = e^{-ht}\{(pC_1 - hC_2)\operatorname{Cos} pt - (pC_2 + hC_1)\operatorname{Sin} pt\} \quad . \quad (2)$$

Полагая теперь $t = 0$ въ формулахъ (1) и (2), получаемъ для опредѣленія C_1 и C_2 уравненія:

$$A = C_2$$

$$pC_1 - hC_2 = 0$$

значитъ:

$$C_2 = A; \qquad C_1 = \frac{h}{p} \cdot A$$

и

$$y = Ae^{-ht}\left\{\operatorname{Sin} pt + \frac{h}{p}\operatorname{Cos} pt\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1').$$

Эта формула принимаетъ болѣе простой видъ, если положить

$$\frac{h}{p} = \operatorname{tg} \alpha$$

тогда получимъ

$$y = \frac{A}{\operatorname{Cos} \alpha} \cdot e^{-ht} \cdot \operatorname{Cos}(pt - \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad (1'')$$

$$y' = -\frac{Ap}{\operatorname{Cos}^2 \alpha} \cdot e^{-ht} \cdot \operatorname{Sin} pt \quad . \quad . \quad . \quad (2'')$$

или положивъ

$$p = \frac{2\pi}{\tau}$$

имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{A}{\operatorname{Cos}\alpha} \cdot e^{-ht} \operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \alpha\right) \\ y' &= \frac{Ap}{\operatorname{Cos}^2\alpha} \cdot e^{-ht} \operatorname{Sin}\frac{2\pi t}{\tau} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{I.}$$

Вторая изъ этихъ формулъ показываетъ, что y' обращается въ нуль для слѣдующихъ значеній времени t:

$$0,\ \frac{1}{2}\tau,\ \tau,\ \frac{3}{2}\tau,\ 2\tau,\ \frac{5}{2}\tau,\ 3\tau \text{ и т. д.}$$

соотвѣтствующія значенія y суть:

$$A;\ -A\cdot e^{-\frac{h\tau}{2}};\ +Ae^{h\tau};\ -Ae^{-\frac{3}{2}h\tau};\ +Ae^{2h\tau} \text{ и т. д.}$$

Это показываетъ, что величина y совершаетъ колебанія съ полнымъ періодомъ τ, причемъ амплитуда размаховъ уменьшается въ геометрической прогрессіи съ знаменателемъ $e^{-h\tau}$.

Этотъ результатъ изображается такимъ чертежомъ: (черт. 34) представляющемъ такъ называемыя «затухающія колебанія».

2-й случай.

$$m^2 - h^2 = 0.$$

Мы видѣли, что въ этомъ случаѣ общій интегралъ разсматриваемаго уравненія, представляется въ такомъ видѣ:

$$y = e^{-ht}\{C_1 t + C_2\} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Составивъ выраженіе

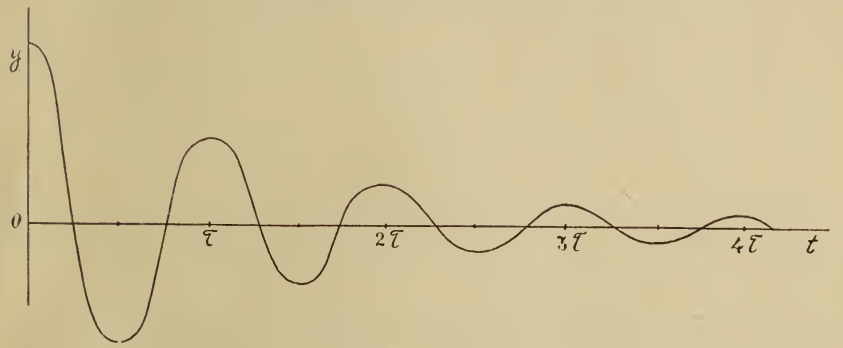
$$y' = e^{-ht}\{(C_1 - hC_2) - hC_1 t\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

и воспользовавшись начальными условіями имѣемъ:

$$A = C_2$$

$$0 = C_1 - hC_2$$

Черт. 34.



откуда:

$$C_1 = hA; \qquad C_2 = A$$

и слѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned} y &= Ae^{-ht}\{1 + ht\} \\ y' &= -h^2 Ate^{-ht} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Эти двѣ формулы показываютъ, что величина y остается все время положительной, убывая съ теченіемъ времени неопредѣленно.

Графически ходъ величины y будетъ представляться такимъ чертежомъ (черт. 35): причемъ эта кривая при $t = \frac{1}{h}$ имѣетъ точку перегиба.

3-й случай.

$$m^2 - h^2 < 0.$$

Мы видѣли, что въ этомъ случаѣ если положить

$$m^2 - h^2 = -p^2$$

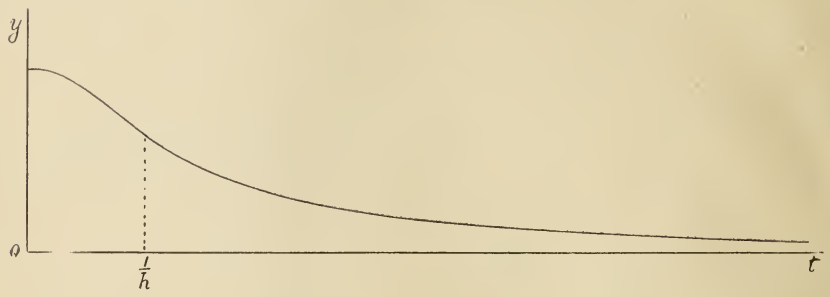
то общій интегралъ предложеннаго уравненія будетъ вида.

$$y = e^{-ht}\{C_1 e^{pt} + C_2 e^{-pt}\}.$$

Составивъ выраженіе

$$y' = -(h-p)\cdot C_1 e^{-(h-p)t} - (h+p)\, C_2 e^{-(h+p)t}.$$

Черт. 35.



Начальныя условія даютъ:

$$A = C_1 + C_2$$

$$0 = (h-p)\, C_1 + (h+p)\, C_2$$

откуда слѣдуетъ:

$$C_1 = \frac{p+h}{2p} A \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{p-h}{2p} A$$

и слѣдовательно

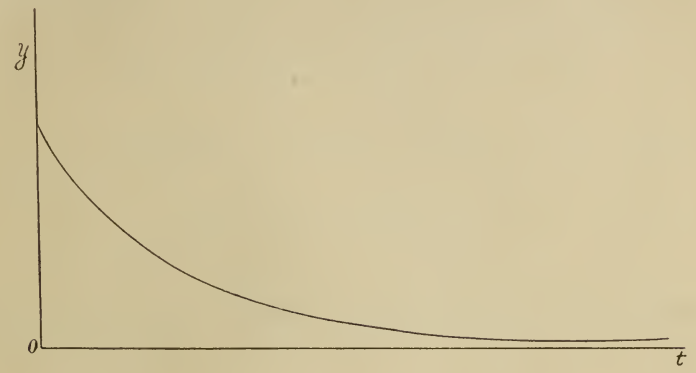
$$y = \frac{A}{2p}\{(p+h)\, e^{-(h-p)t} + (p-h)\cdot e^{-(p+h)t}\}$$

откуда видно, что съ теченіемъ времени y неопредѣленно убываетъ, оставаясь постоянно положительнымъ.

Графически ходъ функціи изобразится кривою фиг. (36),

обращенной выпуклостью внизъ и неимѣющей точекъ перегиба (черт. 36).

Черт. 36.



Въ двухъ послѣднихъ случаяхъ движеніе уже не имѣетъ колебательнаго характера и называется «апериодическимъ».

Болѣе подробный разборъ этого уравненія уже относится къ тѣмъ спеціальнымъ курсамъ, гдѣ оно встрѣчается, какъ выражающее то или иное явленіе.

§ 134. Во многихъ прикладныхъ наукахъ встрѣчаются уравненія вида

$$y'' + n^2 y = a \operatorname{Sin}(kt + \alpha)$$

и

$$y'' + 2hy' + m^2 y = a \operatorname{Sin}(kt + \alpha).$$

Мы покажемъ, какъ выражается общій интегралъ каждаго изъ нихъ.

Въ виду того, что уравненіе

$$y'' + n^2 y = a \operatorname{Sin}(kt + \alpha)$$

представляетъ лишь частный случай уравненія

$$y'' + 2hy' + m^2 y = a \operatorname{Sin}(kt + \alpha)$$

и получается изъ этого послѣдняго положивъ $h = 0$ и замѣнивъ букву m черезъ n, мы начнемъ съ разсмотрѣнія этого уравненія.

Докажемъ слѣдующую теорему: *Общій интегралъ уравненія*

$$y'' + 2hy' + m^2 y = a \operatorname{Sin}(kt + \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

получится, если къ общему интегралу уравненія:

$$u'' + 2hu' + m^2 u = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

прибавить какое угодно частное рѣшеніе предложеннаго уравненія.

Въ самомъ дѣлѣ положимъ, что

$$y = F(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

есть частное рѣшеніе предложеннаго уравненія; это значитъ что величина (*) будучи подставлена въ уравненіе вмѣсто y ему удовлетворяетъ, т. е. что мы имѣемъ тожество:

$$F''(t) + 2h \cdot F'(t) + m^2 F(t) = a \operatorname{Sin}(kt + \alpha) \quad . \quad (**).$$

Сдѣлаемъ теперь

$$y = u + F(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

тогда очевидно, что

$$y' = u' + F'(t)$$

$$y'' = u'' + F''(t)$$

и для опредѣленія величины u мы будемъ имѣть уравненіе:

$$u'' + F''(t) + 2h[u' + F'(t)] + m^2[u + F(t)] = a \operatorname{Sin}(kt + \alpha)$$

или перегруппировавъ члены:

$$u'' + 2hu' + m^2u + F'(t) + 2hF''(t) + m^2F(t) = a \operatorname{Sin}(kt + \alpha)$$

которое въ силу тожества (**) равносильно уравненію:

$$u'' + 2hu' + m^2u = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Такимъ образомъ, найдя по правиламъ § 133 общій интегралъ этого послѣдняго уравненія, мы въ силу формулы (3) получимъ и общій интегралъ предложеннаго.

§ 135. Итакъ все привелось къ нахожденію какого-нибудь частнаго рѣшенія уравненія:

$$y'' + 2hy' + m^2y = a \operatorname{Sin}(kt + \alpha).$$

Очевидно, что написавъ вмѣсто $\operatorname{Sin}(kt + \alpha)$ его величину

$$\operatorname{Sin}(kt + \alpha) = \operatorname{Sin} kt \cdot \operatorname{Cos} \alpha + \operatorname{Cos} kt \cdot \operatorname{Sin} \alpha$$

и полагая

$$a \cdot \operatorname{Cos} \alpha = b \quad \text{и} \quad a \cdot \operatorname{Sin} \alpha = c$$

можемъ вмѣсто предложеннаго уравненія разсматривать такое:

$$y'' + 2hy' + m^2y = b \operatorname{Sin} kt + c \operatorname{Cos} kt \quad . \quad . \quad (1').$$

Такъ какъ функціи $\operatorname{Sin} kt$ и $\operatorname{Cos} kt$ при дифференцированіи воспроизводятся вновь получая лишь постоянные множители, естественно искать частное рѣшеніе этого уравненія въ такомъ видѣ:

$$y = M \operatorname{Sin} kt + N \operatorname{Cos} kt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

причемъ M и N два пока неизвѣстныхъ коэффиціента, кото-

рые надо опредѣлить такъ, чтобы величина (5) удовлетворяла уравненію при всякомъ значеніи t, т. е. тожественно.

Замѣтивъ, что въ силу (5)

$$y' = kM \operatorname{Cos} kt - kN \operatorname{Sin} kt$$

и

$$y'' = -k^2 M \operatorname{Sin} kt - k^2 N \operatorname{Cos} kt$$

мы получимъ по подстановкѣ въ уравненіе (1′) слѣдующее равенство:

$$[(m^2 - k^2)M - 2hk\,N] \operatorname{Sin} kt + [2hk\,M + (m^2 - k^2)N] \operatorname{Cos} kt = \\ = b \operatorname{Sin} kt + c \cdot \operatorname{Cos} kt.$$

Чтобы это равенство имѣло мѣсто *тожественно* необходимо опредѣлить M и N такъ, чтобы коэффиціентъ при $\operatorname{Sin} kt$ и $\operatorname{Cos} kt$ въ обоихъ частяхъ были бы соотвѣтственно равны, т. е. чтобы было:

$$\left.\begin{aligned} (m^2 - k^2)M - 2hk\,N &= b \\ 2hk\,M + (m^2 - k^2)N &= c \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

откуда слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{b \cdot (m^2 - k^2) + 2hk \cdot c}{(m^2 - k^2)^2 + 4h^2k^2} \\ N &= \frac{c \cdot (m^2 - k^2) - 2hk\,b}{(m^2 - k^2)^2 + 4h^2k^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

При такихъ значеніяхъ M и N величина

$$y = M \operatorname{Sin} kt + N \operatorname{Cos} kt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

будетъ частнымъ рѣшеніемъ уравненія

$$y'' + 2hy' + m^2 y = b \operatorname{Sin} kt + c \operatorname{Cos} kt.$$

Общій-же интегралъ его получится придавъ къ величинѣ (5) общій интегралъ уравненія

$$u'' + 2hu' + m^2u = 0.$$

Примѣръ. Интегрировать уравненіе

$$y'' + 2y' + 10y = 5 \operatorname{Sin} 2t + 7 \operatorname{Cos} 2t.$$

Составляемъ прежде всего уравненіе:

$$u'' + 2u' + 10u = 0$$

и находимъ по теоремѣ § 133 его общій интегралъ:

$$u = e^{-t}\{C_1 \operatorname{Sin} 3t + C_2 \operatorname{Cos} 3t\}.$$

Ищемъ затѣмъ частное рѣшеніе предложеннаго уравненія въ видѣ:

$$y = M \operatorname{Sin} 2t + N \operatorname{Cos} 2t.$$

Для опредѣленія M и N получаемъ уравненія:

$$6M - 4N = 5$$

$$4N + 6M = 7.$$

Откуда:

$$M = \frac{5 \cdot 6 + 7 \cdot 4}{6 \cdot 6 + 4 \cdot 4} = \frac{29}{31}$$

$$N = \frac{7 \cdot 6 - 5 \cdot 4}{6 \cdot 6 + 4 \cdot 4} = \frac{11}{31}.$$

Слѣдовательно общій интегралъ предложеннаго уравненія есть:

$$y = e^{-t}\{C_1 \operatorname{Sin} 3t + C_2 \operatorname{Cos} 3t\} + \frac{29}{31} \operatorname{Sin} 2t + \frac{11}{31} \operatorname{Cos} 2t.$$

Такъ какъ при h отличномъ отъ нуля знаменатель въ формулахъ (7) представляетъ сумму двухъ квадратовъ, и значитъ не можетъ обращаться въ нуль, то уравненія служащія для опредѣленія M и N всегда окажутся совмѣстными и доставятъ для нихъ конечныя и опредѣленныя значенія.

§ 136. Разсмотримъ теперь уравненіе:

$$y'' + n^2 y = a \operatorname{Sin}(kt + \alpha)$$

или, что тоже:

$$y'' + n^2 y = b \operatorname{Sin} kt + c \operatorname{Cos} kt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

которое получается изъ уравненія предыдущаго параграфа полагая $h = 0$ и замѣняя m^2 черезъ n^2.

Очевидно, что разыскивая для этого уравненія частное рѣшеніе вида

$$y = M \operatorname{Sin} kt + N \operatorname{Cos} kt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

мы для опредѣленія M и N получимъ уравненія:

$$\left.\begin{aligned} (n^2 - k^2) M &= b \\ \text{и} \qquad (n^2 - k^2) N &= c \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

откуда слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{b}{n^2 - k^2} \\ \text{и} \qquad N &= \frac{c}{n^2 - k^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

если только n *не равно* k.

Въ томъ-же случаѣ когда $n = k$, то уравненія (3) болѣе мѣста не имѣютъ и слѣдовательно не можетъ быть частнаго рѣшенія вида:

$$M \operatorname{Sin} kt + N \operatorname{Cos} kt.$$

Итакъ въ томъ случаѣ, когда n *не равно* k *общій интегралъ уравненія:*

$$y'' + n^2 y = b \operatorname{Sin} kt + c \operatorname{Cos} kt. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

есть:

$$y = C_1 \operatorname{Sin} nt + C_2 \operatorname{Cos} nt + \frac{b}{n^2 - k^2} \operatorname{Sin} kt + \frac{c}{n^2 - k^2} \operatorname{Cos} kt \quad . (5).$$

Чтобы перейти къ тому случаю, когда $n = k$, разсмотримъ сперва задачу болѣе опредѣленную нежели нахожденіе общаго интеграла, а именно: найдемъ такую величину y, которая не только удовлетворяла-бы уравненію (1) но которая удовлетворяла бы и слѣдующимъ начальнымъ условіямъ: при $t = 0$ должно быть $y = A$ и $y' = B$ причемъ A и B двѣ какія угодно заданныя величины.

Взявъ выраженіе (5) для y, составивъ затѣмъ выраженіе производной y'

$$y' = nC_1 \operatorname{Cos} nt + nC_2 \operatorname{Sin} nt + \frac{kb}{n^2 - k^2} \operatorname{Cos} kt - \frac{kc}{n^2 - k^2} \operatorname{Sin} kt.$$

полагаемъ въ обоихъ этихъ выраженіяхъ $t = 0$ и уравниваемъ первое величинѣ A, второе величинѣ B, такимъ образомъ мы получимъ для опредѣленія тѣхъ значеній C_1 и C_2, при которыхъ удовлетворяются и начальныя условія уравненія:

$$C_2 + \frac{c}{n^2 - k^2} = A$$

$$nC_1 + \frac{kb}{n^2 - k^2} = B$$

откуда слѣдуетъ:

$$C_1 = \frac{B}{n} - \frac{k}{n} \cdot \frac{b}{n^2 - k^2}$$

и

$$C_2 = A - \frac{c}{n^2 - k^2}$$

и значитъ искомая величина y есть:

$$y = \left(\frac{B}{n} - \frac{k}{n}\frac{b}{n^2-k^2}\right)\operatorname{Sin} nt + \left(A - \frac{c}{n^2-k^2}\right)\operatorname{Cos} nt + \\ + \frac{b}{n^2-k^2}\operatorname{Sin} kt + \frac{c}{n^2-k^2}\operatorname{Cos} kt \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Эту величину можно написать такъ:

$$y = \frac{B}{n}\operatorname{Sin} nt + A\operatorname{Cos} nt + \frac{b}{n^2-k^2}\left(\operatorname{Sin} kt - \frac{k}{n}\operatorname{Sin} nt\right) + \\ + \frac{c}{n^2-k^2}(\operatorname{Cos} kt - \operatorname{Cos} nt).$$

Положимъ теперь, что мы будемъ брать различныя значенія для k постепенно приближающіяся къ n, очевидно, что при этомъ первые два члена останутся безъ перемѣны, остальные же члены будутъ измѣняться. Если бы мы сдѣлали въ нихъ непосредственно $k = n$, то получили бы неопредѣленное выраженія $\frac{0}{0}$, поэтому надо разсматривать предѣлы этихъ выраженій когда k приближается къ n, воспользовавшись правилами главы IX.

Итакъ надо найти предѣлы выраженій:

$$\frac{n\operatorname{Sin} kt - k\operatorname{Sin} nt}{(n^2-k^2)n}$$

и

$$\frac{\operatorname{Cos} kt - \operatorname{Cos} nt}{n^2-k^2}$$

при k равнымъ n.

Примѣняя правило § 75 для перваго изъ нихъ, получимъ:

$$\left[\frac{nt\operatorname{Cos} kt - \operatorname{Sin} nt}{-2kn}\right]_{k=n} = -\frac{t}{2n}\operatorname{Cos} nt + \frac{1}{2n^2}\operatorname{Sin} nt$$

и для второго:

$$\left[\frac{-t\operatorname{Sin} kt}{-2k}\right]_{k=n} = \frac{t}{2n}\operatorname{Sin} nt$$

и слѣдовательно искомая величина y будетъ:

$$y = \frac{2Bn+1}{n^2} \operatorname{Sin} nt + A \operatorname{Cos} nt - \frac{bt}{2n} \operatorname{Cos} nt + \frac{ct}{2n} \operatorname{Sin} nt \quad . (7).$$

Величинамъ A и B можно приписывать какія угодно зна-
7) не перестанетъ быть частнымъ рѣшеніемъ

$$+ n^2 y = b \operatorname{Sin} nt + c \operatorname{Cos} nt.$$

Проще всего положить $A = 0$ и $B = -\frac{1}{2n}$ тогда будетъ:

$$y = -\frac{b}{2n} t \operatorname{Cos} nt + \frac{c}{2n} t \operatorname{Sin} nt \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

ровѣрить, что эта величина есть дѣйствитель-
ленiе уравненія:

$$y'' + n^2 y = b \operatorname{Sin} nt + c \operatorname{Cos} nt.$$

момъ дѣлѣ имѣемъ:

$$-\frac{b}{2n} \operatorname{Cos} nt + \frac{b}{2} t \operatorname{Sin} nt + \frac{c}{2n} \operatorname{Sin} nt + \frac{ct}{2} \operatorname{Cos} nt$$

$$b \operatorname{Sin} nt + \frac{bn}{2} t \operatorname{Cos} nt + c \operatorname{Cos} nt - \frac{cn}{2} t \operatorname{Sin} nt$$

$$\frac{b}{2} t \operatorname{Cos} nt + \frac{cn}{2} t \operatorname{Sin} nt$$

льно:

$$y'' + n^2 y = b \operatorname{Sin} nt + c \operatorname{Cos} nt$$

т. е. величина (8) есть дѣйствительно рѣшеніе предложеннаго уравненія.

Такимъ образомъ мы видимъ, что для уравненія

$$y'' + n^2 y = b \operatorname{Sin} nt + c \operatorname{Cos} nt$$

частное рѣшеніе имѣетъ видъ

$$Mt \operatorname{Sin} nt + Nt \operatorname{Cos} nt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9$$

т. е. перемѣнная t входитъ множителемъ внѣ знаковъ Sin Cos.

Этотъ результатъ гораздо легче запомнить нежели окончательную формулу (8) поэтому когда предложено уравненіе вид

$$y'' + n^2 y = b \operatorname{Sin} nt + c \operatorname{Cos} nt$$

то не пользуясь формулою (8) можно найти частное его р шеніе поступая какъ въ ниже показанномъ примѣрѣ.

Примѣръ. Интегрировать уравненіе:

$$y'' + 4y = 5 \operatorname{Sin} 2t + 7 \operatorname{Cos} 2t.$$

Ищемъ частное рѣшеніе вида

$$y = Mt \operatorname{Sin} 2t + Nt \operatorname{Cos} 2t$$

имѣемъ:

$$y' = 2\,Mt \operatorname{Cos} 2t + M \operatorname{Sin} 2t - 2\,Nt \operatorname{Sin} 2t + N \operatorname{Cos} 2t$$

$$y'' = -4\,Mt \operatorname{Cos} 2t + 2\,M \operatorname{Cos} 2t + 2\,M \operatorname{Cos} 2t$$

$$-4\,Nt \operatorname{Sin} 2t - 2N \operatorname{Sin} 2t - 2N \operatorname{Sin} 2t$$

значитъ

$$y'' + 4y = 4M \operatorname{Cos} 2t - 4N \operatorname{Sin} 2t = 7 \operatorname{Cos} 2t + 5 \operatorname{Sin} 2$$

слѣдовательно:

$$4M = 7$$

$$-4N = 5.$$

Откуда

$$N = -\frac{5}{4}; \qquad M = \frac{7}{4}$$

и искомое частное рѣшеніе есть:

$$y = \frac{7}{4} t \operatorname{Sin} 2t - \frac{5}{4} t \operatorname{Cos} 2t$$

а такъ какъ общій интегралъ уравненія

$$u'' + 4u = 0$$

есть

$$u = C_1 \operatorname{Sin} 2t + C_2 \operatorname{Cos} 2t$$

то общій интегралъ уравненія:

$$y'' + 4y = 5 \operatorname{Sin} 2t + 7 \operatorname{Cos} 2t$$

есть:

$$y = C_1 \operatorname{Sin} 2t + C_2 \operatorname{Cos} 2t + \frac{7}{4} t \operatorname{Sin} 2t - \frac{5}{4} t \operatorname{Cos} 2t$$

§ 137. Уравненія

$$y'' + n^2 y = a \operatorname{Sin} (kt + \alpha)$$

и

$$y'' + 2hy' + m^2 y = a \operatorname{Sin} (kt + \alpha)$$

встрѣчаются въ прикладныхъ наукахъ весьма часто, такъ какъ они представляютъ колебательное движеніе подъ дѣйствіемъ внѣшней возмущающей силы, мѣняющей свою величину съ теченіемъ времени періодически пропорціонально множителю $\operatorname{Sin} (kt + \alpha)$, при этомъ y представляетъ обыкновенно отклоненіе изучаемой величины отъ ея значенія 0, соотвѣтствующаго покою или равновѣсію.

Очевидно, что когда возмущающая сила выражается формулою

$$a \operatorname{Sin}(kt + \alpha)$$

то a есть наибольшая величина этой силы. Постоянная сила такой величины сообщила бы отклоненіе y_0, опредѣляемое равенствомъ

$$n^2 y_0 = a$$

т. е.

$$y_0 = \frac{a}{n^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*).$$

Сравнимъ теперь съ этимъ «статическимъ» отклоненіемъ тѣ, которыя получаются при движеніи, т. е. когда y опредѣляется уравненіемъ

$$y'' + n^2 y = a \operatorname{Sin}(kt + \alpha).$$

Мы видѣли, что общій интегралъ этого уравненія выражается когда n *неравно* k формулою:

$$y = C_1 \operatorname{Sin} nt + C_2 \operatorname{Cos} nt + \frac{b}{n^2 - k^2} \operatorname{Sin} kt + \frac{c}{n^2 - k^2} \operatorname{Cos} kt$$

причемъ

$$b = a \cdot \operatorname{Cos} \alpha \qquad \text{и} \qquad c = a \operatorname{Sin} \alpha$$

подставляя вмѣсто b и c эти величины мы можемъ предыдущую формулу написать въ такомъ видѣ:

$$y = C_1 \operatorname{Sin} nt + C_2 \operatorname{Cos} nt + \frac{a}{n^2 - k^2} \cdot \operatorname{Sin}(kt + \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

или замѣнивъ a его величиною $n^2 y_0$:

$$y = C_1 \operatorname{Sin} nt + C_2 \operatorname{Cos} nt + \frac{n^2}{n^2 - k^2} \cdot y_0 \cdot \operatorname{Sin}(kt + \alpha). \quad . \quad . \quad (2)$$

Очевидно, что при $a = 0$ послѣдній членъ пропадаетъ, слѣдовательно первые два представляютъ собою тѣ колебанія которыя происходятъ лишь вслѣдствіи начальнаго отклоненія отъ положенія равновѣсія безъ дѣйствія внѣшней возмущающей силы — эти колебанія называются «свободными».

Выраженіе-же

$$\frac{n^2}{n^2 - k^2} y_0 \operatorname{Sin}(kt + \alpha) \ . \ . \ .$$

представляетъ вліяніе возмущающей силы, и колебанія имъ представляемыя называются «вынужденными».

Разсмотримъ теперь случай когда $n = k$, т. е. предложено уравненіе

$$y'' + n^2 y = a \operatorname{Sin}(nt + \alpha).$$

Общій интегралъ этого уравненія есть

$$y = C_1 \operatorname{Sin} nt + C_2 \operatorname{Cos} nt - \frac{t}{2n}\left[b \operatorname{Cos} nt - c \operatorname{Sin} nt\right]$$

т. е. подставляя вмѣсто b и c ихъ величины

$$y = C_1 \operatorname{Sin} nt + C_2 \operatorname{Cos} nt - \frac{t}{2n} a \operatorname{Cos}(nt + \alpha)$$

или замѣнивъ a его величиною $y_0 n^2$ и замѣтивъ, что

$$- \operatorname{Cos}(nt + \alpha) = \operatorname{Sin}\left(nt + \alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$y = C_1 \operatorname{Sin} nt + C_2 \operatorname{Cos} nt + \frac{y_0 n}{2} \cdot t \operatorname{Sin}\left(nt + \alpha + \frac{3\pi}{2}\right) . \quad (3)$$

Эта формула показываетъ, что вынужденныя колебанія выражаются въ этомъ случаѣ такъ:

$$y_0 \cdot \frac{nt}{2} \cdot \operatorname{Sin}\left(nt + \alpha + \frac{3\pi}{2}\right) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

Чтобы изслѣдовать формулы (1), (4) введемъ вмѣсто величинъ n и k соотвѣтствующіе имъ періоды, т. е. величины τ и τ_1 опредѣляемыя равенствами:

$$\tau = \frac{2\pi}{n} \quad \text{и} \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{k}$$

тогда будетъ:

$$\frac{n^2}{n^2 - k^2} = \frac{\frac{4\pi^2}{\tau^2}}{\frac{4\pi^2}{\tau^2} - \frac{4\pi^2}{\tau_1^2}} = \frac{\tau_1^2}{\tau_1^2 - \tau^2}.$$

Эта величина представляетъ отношеніе амплитуды вынужденныхъ колебаній къ величинѣ наибольшаго «статическаго» отклоненія производимаго данною силою, причемъ τ_1 есть періодъ измѣненія силы, τ — періодъ свободныхъ колебаній системы.

Изъ формулы

$$\frac{\tau_1^2}{\tau_1^2 - \tau^2}$$

непосредственно вытекаютъ такія слѣдствія:

1) Если величина τ_1 велика по сравненію съ τ, то отношеніе

$$\frac{\tau_1^2}{\tau_1^2 - \tau^2} = \frac{1}{1 - \frac{\tau^2}{\tau_1^2}}$$

будетъ близко къ 1, т. е. возмущеніе производимое силою будетъ близко къ тому, которое эта сила производитъ дѣйствуя статически.

2) Если величина τ_1 мала по сравненію съ τ, то отношеніе:

$$\frac{\tau_1^2}{\tau_1^2 - \tau^2} = -\frac{\frac{\tau_1^2}{\tau^2}}{1 - \frac{\tau_1^2}{\tau^2}}$$

будетъ по абсолютной величинѣ само *мало*, т. е. сила малаго періода, дѣйствующая на систему періодъ свободныхъ колебаній которой великъ, производитъ лишь весьма малое возмущеніе по сравненію съ «статическимъ».

3) Когда періодъ силы и періодъ свободныхъ колебаній системы близки къ равенству, то возмущеніе производимое силою весьма велико по сравненію со статическимъ.

4) Когда періодъ силы и періодъ свободныхъ колебаній системы въ точности равны, то возмущеніе производимое силою возрастаетъ пропорціонально времени.

Этими свойствами вынужденныхъ колебаній объясняется множество самыхъ разнообразныхъ явленій начиная отъ «вѣковыхъ неравенствъ» въ движеніи небесныхъ тѣлъ, качки корабля на волненіи, вибрацій корабля, явленій резонанса звучащихъ тѣлъ, пользованіе пружинными подвѣсами для компасовъ и барометровъ на кораблѣ, фрамовскими указателями числа оборотовъ, кренометрами, приборами для записи вибрацій и т. под.

§ 138. Совершенно аналогичными свойствами (кромѣ послѣдняго) обладаютъ вынужденныя колебанія и въ сопротивляющейся средѣ.

Въ § 135 было показано, что общій интегралъ уравненія

$$y'' + 2hy' + m^2 y = a \operatorname{Sin}(kt + \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

выражается формулою:

$$y = e^{-ht}\{C_1 \operatorname{Sin} pt + C_2 \operatorname{Cos} pt\} + M \operatorname{Sin} kt + N \operatorname{Cos} kt$$

причемъ:

$$p = \sqrt{m^2 - h^2}$$

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{b(m^2 - k^2) + 2hkc}{(m^2 - k^2)^2 + 4h^2k^2} \\ N &= \frac{c(m^2 - k^2) - 2hkb}{(m^2 - k^2)^2 + 4h^2k^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$b = a \operatorname{Cos} \alpha; \qquad c = a \operatorname{Sin} \alpha$$

C_1 и C_2 — постоянныя производныя. Члены содержащія эти постоянныя представляютъ, какъ мы видѣли выше свободныя колебанія системы.

Въ разсматриваемомъ случаѣ эти члены содержатъ множитель e^{-ht}, который съ теченіемъ времени стремится къ нулю и свободныя колебанія затухаютъ, какъ было показано въ § 133, и значитъ останутся только вынужденныя колебанія представляемыя формулою

$$M \operatorname{Sin} kt + N \operatorname{Cos} kt.$$

Чтобы сравнить амплитуду вынужденныхъ колебаній съ тѣмъ «статическимъ» отклоненіемъ которое произвела бы возмущающая сила и которое въ нашемъ случаѣ выразится формулою:

$$y_0 = \frac{a}{m^2}$$

мы преобразуемъ выраженіе

$$y = M \operatorname{Sin} kt + N \operatorname{Cos} kt$$

въ такой видъ, при которомъ величина амплитуды видна сразу. Для этого стоитъ только положить:

$$M = A \operatorname{Cos} \beta; \qquad N = A \operatorname{Sin} \beta$$

очевидно будетъ:

$$A = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{a}{\sqrt{(m^2 - k^2)^2 + 4h^2 k^2}}$$

и

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{N}{M}$$

и тогда

$$y = A \operatorname{Sin} (kt + \beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Pwe
p 3158.

$$\int_0^{2\pi} \left(\varphi + i + ie^{-\varphi}\right) d\varphi$$

$$2\pi$$